集合论与图论10

几种特殊的图

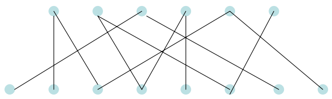
何英华

hyh@tju.edu.cn

目录

二部图

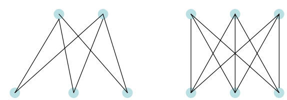
- 设G=<V,E>为一个无向图，若能将V分成V_1和V_2（$V_1 \cup V_2=V, V_1 \cap V_2=\varnothing$），使得G中的每条边的两个端点都是一个属于$V_1$，另一个属于$V_2$，则称G为二部图（或称二分图，偶图等），称$V_1$和$V_2$为互补顶点子集，常将二部图G记为$<V_1, V_2, E>$。



- 注意，n阶零图为二部图。

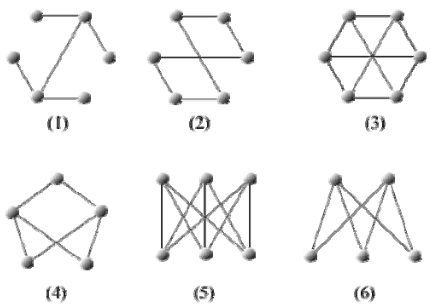
完全二部图

- 若G是简单二部图，V_1中每个顶点均与V_2中所有顶点相邻，则称G为完全二部图，记为$K_{r,s}$，其中$r=|V_1|, s=|V_2|$。

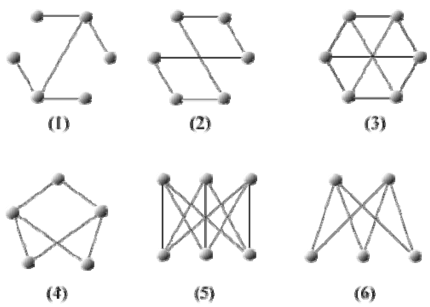


- 在完全二部图$K_{r,s}$中，它的顶点数n=r+s，边数m=r·s。

判断下面的图是不是二部图？哪些是同构的图？



下面的图都是二部图，其中图3与图5同构，图5是$K_{3,3}$的标准形式，图4与图6同构，图6是$K_{2,3}$的标准形式。



二部图的判别

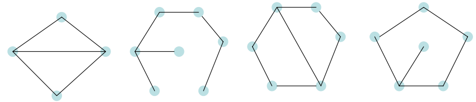
定理：一个无向图G=<V,E>是二部图当且仅当G中无奇数长度的回路。

- 必要性。若G中无回路，结论显然成立。若G中有回路，只需证明G中无奇圈。
- 充分性。不妨设G为连通图，否则可对每个连通分支进行讨论。设v_0为G中任意一个顶点，令
  $V_1=\{v|v\in V(G)\wedge d(v_0,v)$为偶数$\}$
  $V_2=\{v|v\in V(G)\wedge d(v_0,v)$为奇数$\}$

易知，$V_1\neq\varnothing,V_2\neq\varnothing,V_1\cap V_2=\varnothing$，$V_1\cup V_2=V(G)$。下面只要证明$V_1$中任意两顶点不相邻，$V_2$中任意两点也不相邻。

例题

- 判别以下图中哪些是二部图



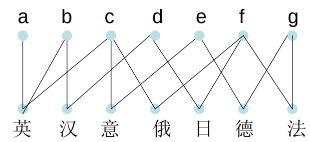
不是　　是　　是　　不是

例题

- 今有a,b,c,d,e,f,g等7个人，已知a会讲英语， b会讲英语和汉语，c会讲英语、意大利语和俄语，d会讲日语和汉语，e会讲德语和意大利语，f会讲法语、日语和俄语，g会讲法语和德语，试问能否从这7个人中找出7名翻译，使得每人翻译一种语言？

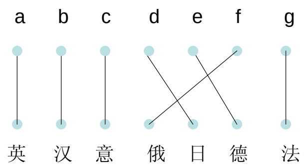
例题

- 今有a,b,c,d,e,f,g等7个人，已知a会讲英语， b会讲英语和汉语，c会讲英语、意大利语和俄语，d会讲日语和汉语，e会讲德语和意大利语，f会讲法语、日语和俄语，g会讲法语和德语，试问能否从这7个人中找出7名翻译，使得每人翻译一种语言？



例题

-
-

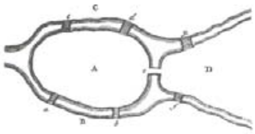


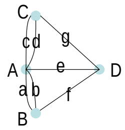
目录

- 二部图
- 欧拉图
- 哈密顿图
- 平面图

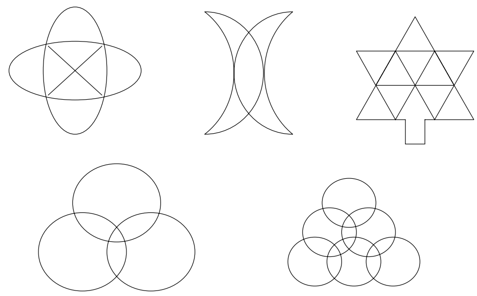
七桥问题

- 1736年，欧拉提出“七桥问题”，图论诞生





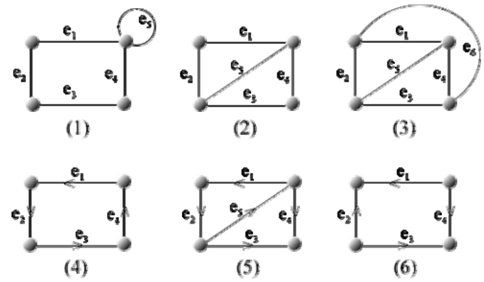
一笔画



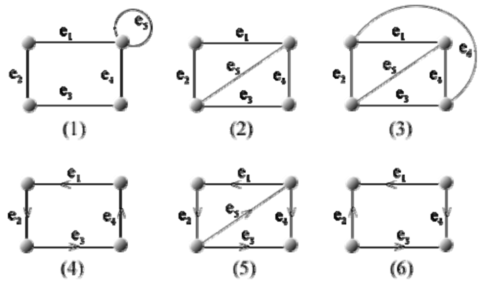
欧拉图

- 欧拉通路: 经过图中所有边的简单通路
- 欧拉回路: 经过图中所有边的简单回路
- 欧拉图: 有欧拉回路的图

- 在下面各图中，
  哪些存在欧拉回路？
  哪些存在欧拉通路？

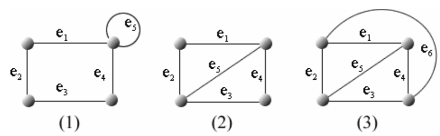


- 在下面各图中，图1,4中存在欧拉回路，是欧拉图，图2中存在欧拉通路，但不存在欧拉回路，不是欧拉图。图3,5,6中既没有欧拉回路，也没有欧拉通路，不是欧拉图。



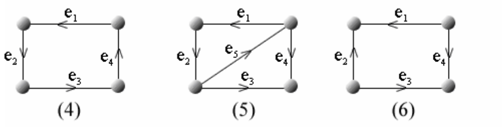
无向欧拉图的判别

- 定理：无向图G具有欧拉通路，当且仅当G是连通图且无奇度顶点或有两个奇度顶点。若无奇度顶点，则通路为回路，若有两个奇度顶点，则它们是每条欧拉通路的端点。
- 推论：无向图G是欧拉图当且仅当G是连通图，且G中没有奇度顶点。

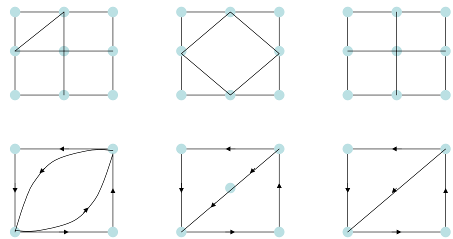


有向欧拉图的判别

- 定理：有向图D具有欧拉通路，当且仅当D是连通图且D中除了两个例外顶点之外，其余顶点的入度都等于出度，这两个例外顶点中，一个的入度比出度大1，另一个的出度比入度大1。
- 推论：有向图D是欧拉图当且仅当D是连通图，且D中所有顶点的入度都等于出度。



例题

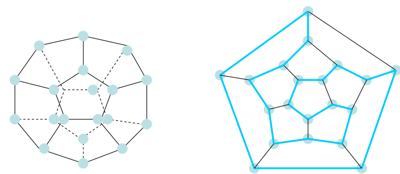


目录

- 二部图
- 欧拉图
- 哈密顿图
- 平面图

周游世界问题

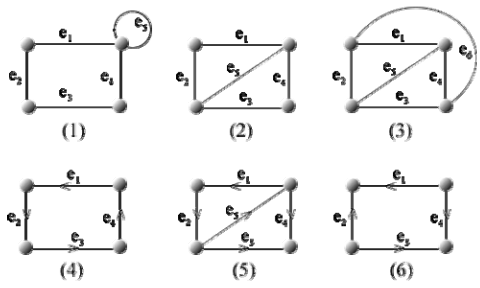
- 1859年，数学家哈密顿将正十二面体的每个顶点比作一个城市，连接两个顶点之间的边看作城市之间的交通线，提出周游世界问题：能否从某个城市出发沿交通线经过每个城市一次并且仅一次，最后回到出发点？



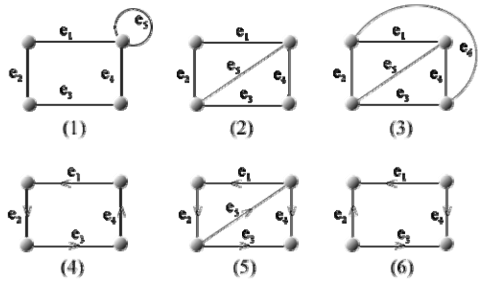
哈密顿图

- 哈密顿通路: 经过图中所有顶点的初级通路
- 哈密顿回路: 经过图中所有顶点的初级回路
- 哈密顿图: 有哈密顿回路的图

- 在下面各图中，
- 哪些是哈密顿图？哪些具有哈密顿通路？



- 在下面各图中，图1，2，3都有哈密顿回路，是哈密顿图。图4具有哈密顿回路，是哈密顿图。图5只有哈密顿通路，但无哈密顿回路，不是哈密顿图，图6中既无哈密顿回路，也没有哈密顿通路，不是哈密顿图。



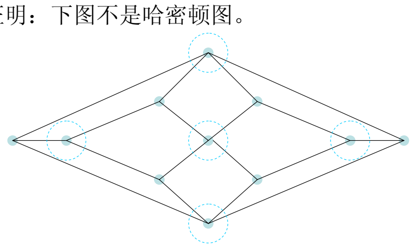
无向哈密顿图的必要条件

- 定理: 设$G=<V,E>$是无向哈密顿图，则对V的任意非空真子集V_1有$p(G-V_1)\leq|V_1|$。
- 证明: 设C是G中任意哈密顿回路，则V_1中的顶点在C中有些相邻，有些不相邻，$p(C-V_1)\leq|V_1|$。因为C是G的生成子图, 所以$p(G-V_1)\leq P(C-V_1)\leq|V_1|$.
- 推论：有割点的图一定不是哈密顿图。

举例

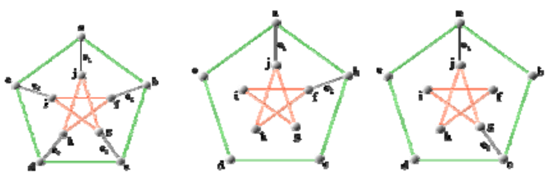
1. 证明：当$r\neq s$时，完全二部图$K_{r,s}$不是哈密顿图。

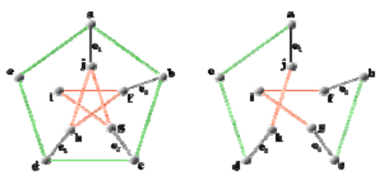
2. 证明：下图不是哈密顿图。



反例: 非充分条件

- 反例: 彼得松图
  - 彼得松图满足: $\forall V_1\neq\varnothing$, $p(G-V_1)\leq|V_1|$
  - 彼得松图不是哈密顿图
  - 彼得松图中存在哈密顿通路





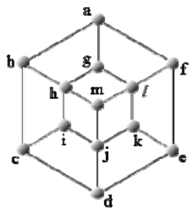
度数为2的顶点关联的两条边必须出现在哈密顿回路上

无向哈密顿图的充分条件

- 定理：设G是$n(\geq3)$阶无向简单图，若对G中任意不相邻顶点u与v均有$d(u)+d(v)\geq n-1$，则G中存在哈密顿通路。又若$d(u)+d(v)\geq n$，则G是哈密顿图。
- 推论: 设G是$n(\geq3)$阶无向简单图，若对G中任意顶点u有$d(u)\geq n/2$，则G是哈密顿图。
- 完全图K_n当$n\geq3$时是哈密顿图。完全二部图$K_{r,s}$当$r=s\geq2$时是哈密顿图。

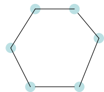
例题

1. 某国际会议共有8人参加，他们来自不同的国家。已知他们中任何两个无共同语言的人中的每一个，与其余有共同语言的人数之和大于或等于8，问能否将这8个人排在圆桌旁，使其任何人都能与两边的人交谈。
2. 下面的图是哈密顿图吗？证明你的结论。



反例: 非必要条件

- 反例，例如圈图C_6



- 目前尚未找到哈密顿图的简单的充要条件，只有一些必要条件和充分条件。判断一个图不是哈密顿图，靠破坏必要条件（连通、度数为2的顶点关联的两条边必须出现在哈密顿回路上、删除顶点等等……）。判断一个图是哈密顿图，看是否能找出一条哈密顿回路，或是否满足充分条件。

有向哈密顿图的充分条件

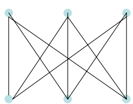
- 定理：设D是n(≥2)阶有向简单图，如果略去所有有向边的方向，所得无向图中含有生成子图K_n，则D中存在哈密顿通路。
- 推论: n(≥3)阶有向完全图都是哈密顿图。

目录

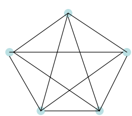
- 二部图
- 欧拉图
- 哈密顿图
- 平面图
  - 平面图的概念
  - 欧拉公式
  - 库拉图斯基定理
  - 平面图的对偶图

平面图

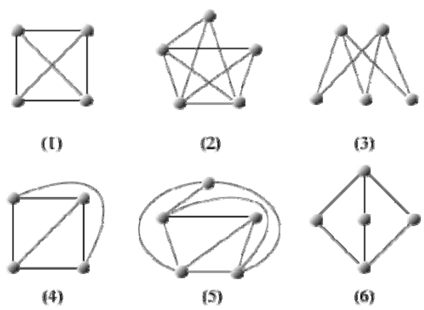
- 定义：如果图G能以这样的方式画在平面上，即除顶点处外无边相交，则称G为平面图。画出的无边相交的图称为G的平面嵌入或平面表示。无平面嵌入的图称为非平面图。



库拉图斯基图$K_{3,3}$



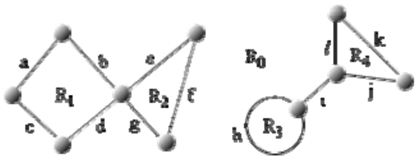
库拉图斯基图K_5



面和面的次数

- 定义：设G是平面图，由G的边将G所在的平面划分成若干个区域，每个区域都称为G的一个面。其中面积无限的面称为无限面或外部面，面积有限的面称为有限面或内部面。包围每个面的所有边组成的回路组称为该面的边界，边界的长度称为该面的次数。常记外部面为R_0，内部面为R_1，R_2，…，R_k，面R_i的次数记为**deg(R_i)**。

- 定理：平面图G中所有面的次数之和等于边数m的两倍。



- 有5个面。R_1的边界为圈abdc，deg(R_1)＝4。R_2的边界是efg，deg(R_2)＝3。R_3的边界为环h，deg(R_3)＝1。R_4的边界为圈kjl，deg(R_4)＝3。外部面R_0的边界由一个简单回路abefgdc和一个复杂回路kjihil组成，deg(R_0)＝13。

极大平面图

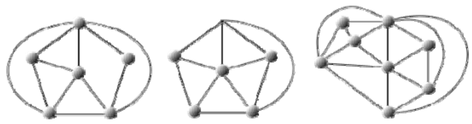
- 极大平面图是简单平面图，但是在任意两个不相邻顶点之间加边就变成非平面图。

- K_n，当n≤4时都是极大平面图。K_5删除任意一条边所得图也是极大平面图。

- 定理：设G为n(n≥3)阶简单连通的平面图，G为极大平面图当且仅当G的每个面的次数均为3。

极大平面图

- 在下面所示的各平面图中，只有(3)是极大平面图。

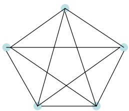


(1) (2) (3)

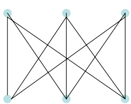
极小非平面图

- 极小非平面图是非平面图, 但是删除任意一条边就是平面图。

- K_5和$K_{3,3}$都是极小非平面图。

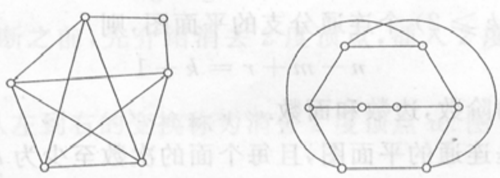


库拉图斯基图K5



库拉图斯基图K3,3

图 6.38 所示两个图也都是极小非平面图.



(a) (b)

图 6.38

欧拉公式

- 欧拉公式：对于任意的连通的平面图G有

  n-m+r=2，

  其中，n，m，r分别为G的顶点数，边数和面数。

- 欧拉公式的推广：对于具有k(k≥2)个连通分支的平面图G，有

  n-m+r = k+1

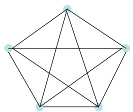
  其中n，m，r分别为G的顶点数，边数和面数。

平面图的边数m与顶点数n的关系

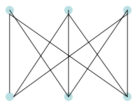
- 定理：设G是连通平面图, G的各面的次数至少是l (≥3), 则m≤(n-2) l/(l-2)。

平面图的边数m与顶点数n的关系

- 推论：K_5与$K_{3,3}$都不是平面图。



库拉图斯基图K5



库拉图斯基图K3,3

平面图的边数m与顶点数n的关系

- 定理：设G是有k(k≥2)个连通分支的平面图, G的各面的次数至少是l (≥3), 则m≤(n-k-1) l/(l-2)。

例题

- 证明：设G是n(n≥3)阶m条边的简单连通平面图，则m≤3n-6。

例题

- 证明：设G是n(n≥3)阶m条边的简单平面图，则m≤3n-6。

例题

- 证明：设n(≥3)阶简单极大平面图G有m条边，则 m=3n-6.

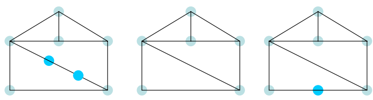
例题

- 证明：设G是简单平面图，则G的最小度δ≤5。

同胚

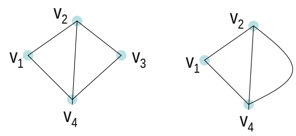
- 插入2度顶点: 把(u,v)变成(u,w),(w,v)
- 删除2度顶点: deg(w)=2, 把(u,w),(w,v)变成(u,v)

- 同胚: 反复插入或删除2度顶点后同构



收缩

- 图G中边(u,v)的收缩由下面的方法给出：删除边(u,v)，将u与v重合，所得顶点记为u(或v)，使u(或v)关联除边(u,v)外，原来u与v关联的一切边.



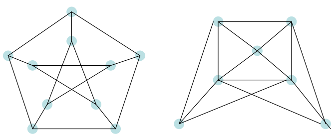
库拉图斯基定理

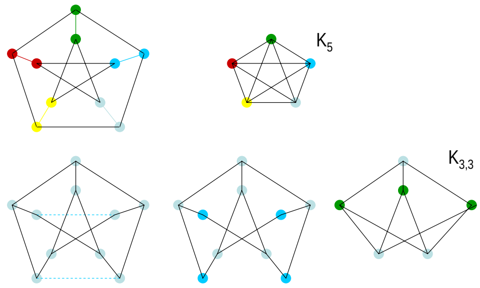
- 第1种叙述形式：
  一个图是平面图当且仅当它不含与K_5同胚子图,也不含与$K_{3,3}$同胚子图.

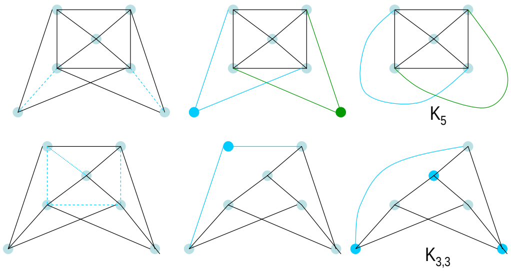
- 第二种叙述形式：
  一个图是平面图当且仅当它没有可以收缩到K_5的子图,也没有收缩到$K_{3,3}$的子图.

例题

判断以下两个图是否是平面图

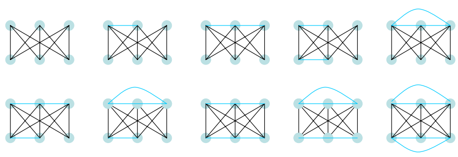






例题

- K_6的含$K_{3,3}$的非同构子图有哪些?



- 解: K_6有15条边, $K_{3,3}$有9条边, 分别给$K_{3,3}$加0,1,2,3,4,5,6条边，共10种.

对偶图

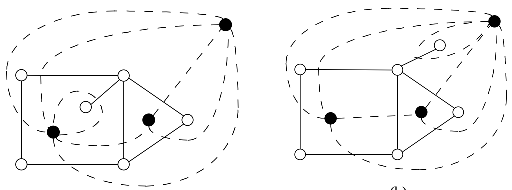
设平面图G＝<V,E>，G有r个面，n个顶点，m条边
用如下的方法构造G*：

(1)在G的面R_i中任取 一个顶点v_i*作为G*的顶点，G*的顶点集V*＝{v_1*,v_2*,...,v_r*}，

(2)若面R_i和R_j的边界中有公共边e_k，连接对应顶点v_i*和v_j*，得G*的边e_k*与e_k相交。当e_k只在G的一个面R_i的边界中出现时，以R_i中的顶点v_i*为顶点做环e_k*，e_k*为G*中一个环。设G*的边集为E*,由于G*的边数与G的边数相同，则E*＝{e_1*,e_2*,…,e_m*}，

称G*＝<V*,E*>为G的**对偶图**.

例



(a) (b)

同构平面图的对偶图，不一定是同构的。

性质

设G*是连通平面图G的对偶图，n*，m*，r*和n，m，r分别为G*和G的顶点数，边数，面数，G*的顶点v_i*位于G的面R_i中，则

(1) n*＝r
(2) m*＝m
(3) r*＝n
(4) $d_{G^*}(v_i^*)$＝deg(R_i)

若前提改为G具有k(≥2)个连通分支则r*＝n－k+1

例题

- 证明：平面图G的对偶图G*为欧拉图当且仅当G的每个面的次数均为偶数。

例题

- 证明：若G为二部图并且是平面图，则G的对偶图均为欧拉图。

作业

- 6.5
- 6.15
- 6.25
- 6.36
- 6.50