



## 集合论与图论10

# 几种特殊的图

何英华

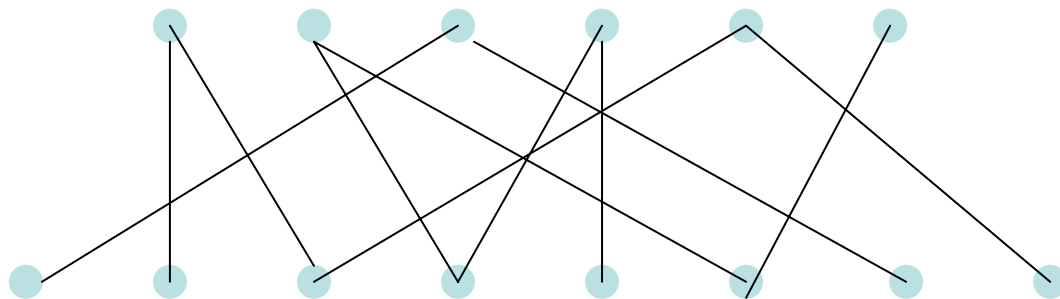
*hyh@tju.edu.cn*

# 目录

- 二部图
- 欧拉图
- 哈密顿图
- 平面图

# 二部图

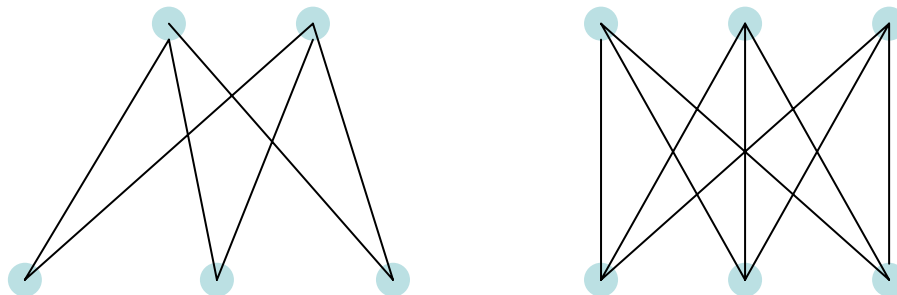
- 设 $G=\langle V,E \rangle$ 为一个无向图，若能将 $V$ 分成 $V_1$ 和 $V_2$  ( $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ )，使得 $G$ 中的每条边的两个端点都是一个属于 $V_1$ ，另一个属于 $V_2$ ，则称 $G$ 为二部图（或称二分图，偶图等），称 $V_1$ 和 $V_2$ 为互补顶点子集，常将二部图 $G$ 记为 $\langle V_1, V_2, E \rangle$ 。



- 注意， $n$ 阶零图为二部图。

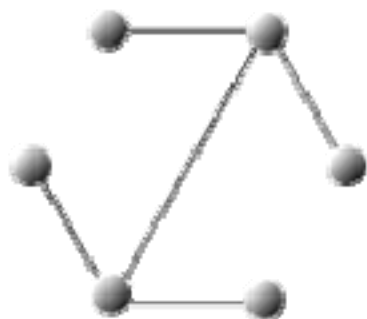
# 完全二部图

- 若 $G$ 是简单二部图， $V_1$ 中每个顶点均与 $V_2$ 中所有顶点相邻，则称 $G$ 为完全二部图，记为 $K_{r,s}$ ，其中 $r=|V_1|, s=|V_2|$ 。

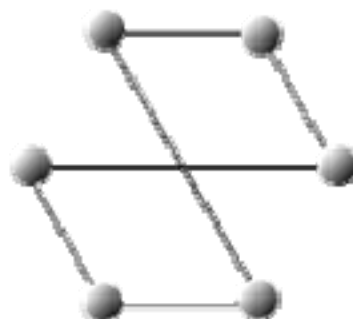


- 在完全二部图 $K_{r,s}$ 中，它的顶点数 $n=r+s$ ，边数 $m=r \cdot s$ 。

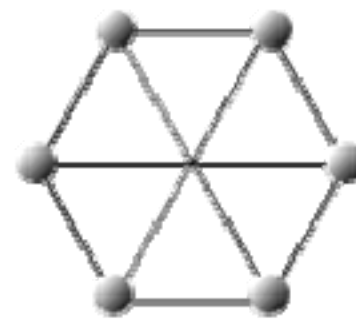
判断下面的图是不是二部图？哪些是同构的图？



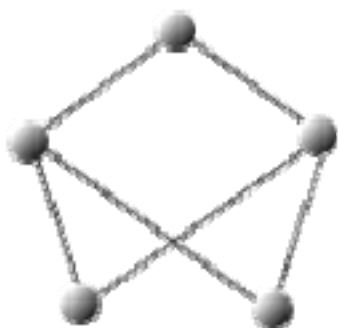
(1)



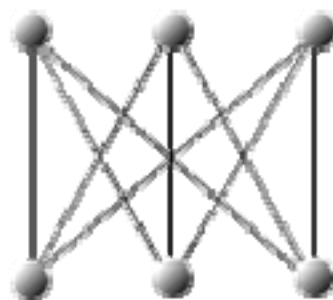
(2)



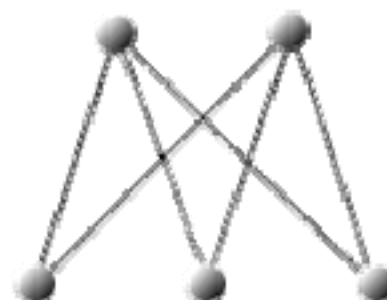
(3)



(4)

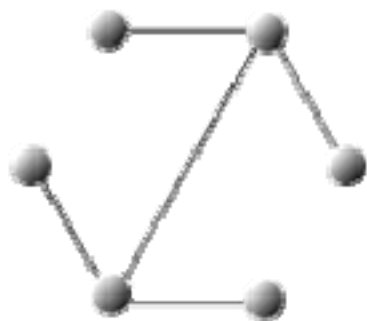


(5)

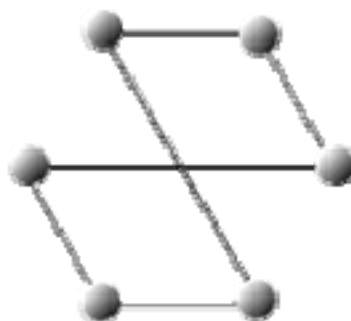


(6)

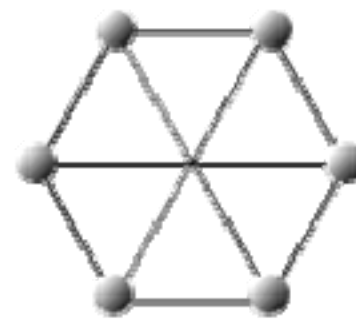
下面的图都是二部图，其中图3与图5同构，图5是 $K_{3,3}$ 的标准形式，图4与图6同构，图6是 $K_{2,3}$ 的标准形式。



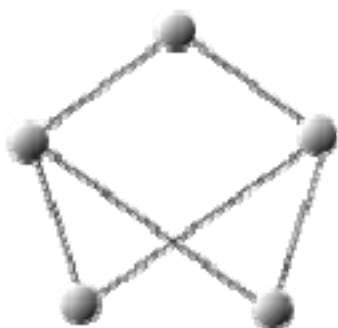
(1)



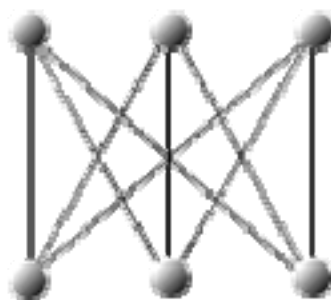
(2)



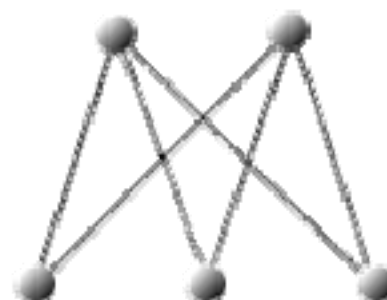
(3)



(4)



(5)



(6)

# 二部图的判别

**定理：**一个无向图 $G=<V,E>$ 是二部图当且仅当 $G$ 中无奇数长度的回路。

- 必要性。若 $G$ 中无回路，结论显然成立。若 $G$ 中有回路，只需证明 $G$ 中无奇圈。
- 充分性。不妨设 $G$ 为连通图，否则可对每个连通分支进行讨论。设 $v_0$ 为 $G$ 中任意一个顶点，令

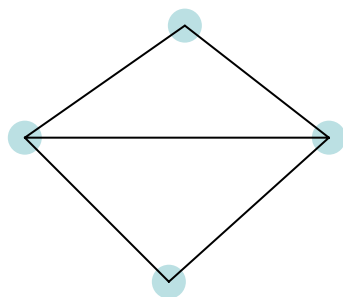
$$V_1=\{v|v\in V(G)\wedge d(v_0,v)\text{为偶数}\}$$

$$V_2=\{v|v\in V(G)\wedge d(v_0,v)\text{为奇数}\}$$

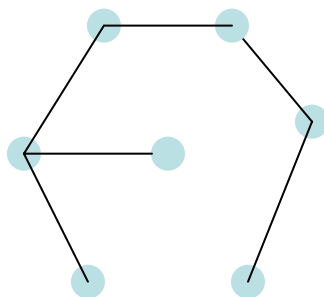
易知， $V_1\neq\emptyset, V_2\neq\emptyset, V_1\cap V_2=\emptyset, V_1\cup V_2=V(G)$ 。下面只要证明 $V_1$ 中任意两顶点不相邻， $V_2$ 中任意两点也不相邻。

# 例题

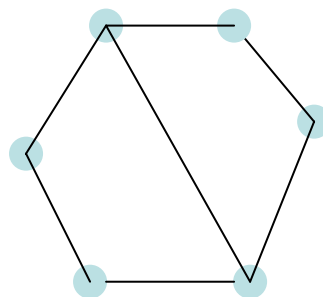
- 判别以下图中哪些是二部图



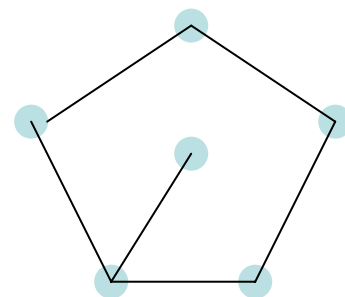
不是



是



是



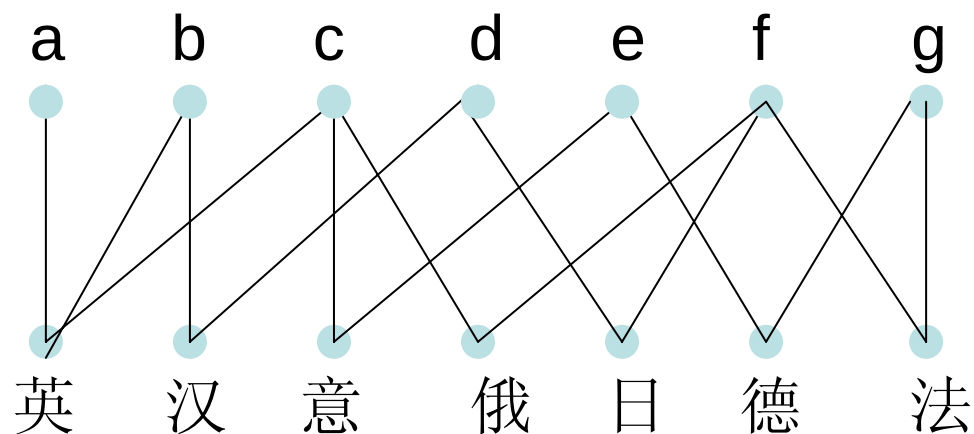
不是

# 例题

- 今有a,b,c,d,e,f,g等7个人，已知a会讲英语， b会讲英语和汉语， c会讲英语、意大利语和俄语， d会讲日语和汉语， e会讲德语和意大利语， f会讲法语、日语和俄语， g会讲法语和德语，试问能否从这7个人中找出7名翻译，使得每人翻译一种语言？

# 例题

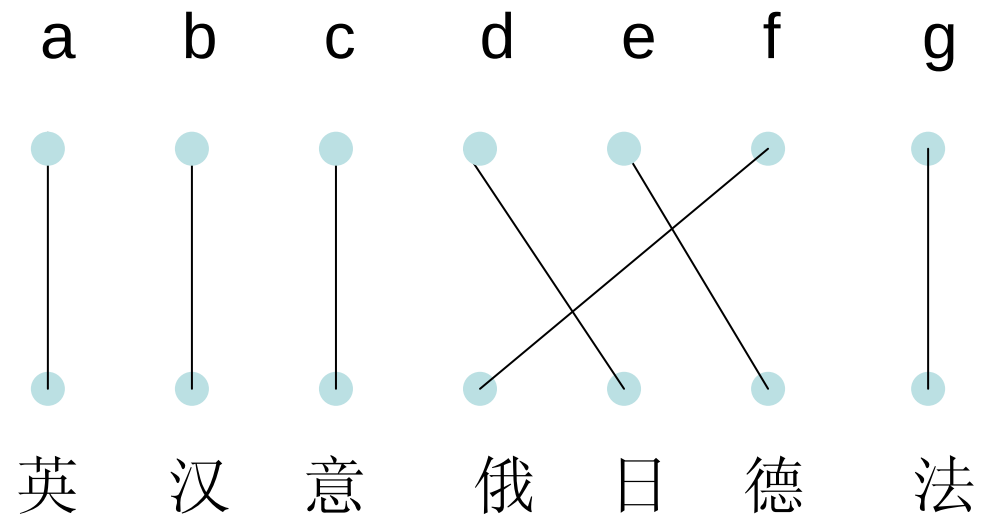
- 今有a,b,c,d,e,f,g等7个人，已知a会讲英语，b会讲英语和汉语，c会讲英语、意大利语和俄语，d会讲日语和汉语，e会讲德语和意大利语，f会讲法语、日语和俄语，g会讲法语和德语，试问能否从这7个人中找出7名翻译，使得每人翻译一种语言？



# 例题

- 

- 

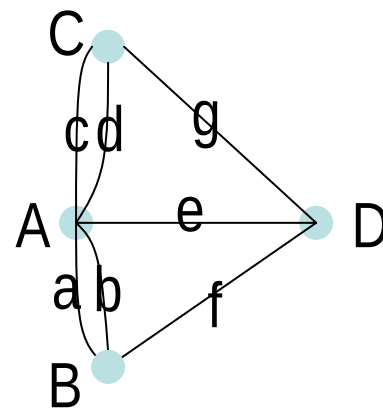
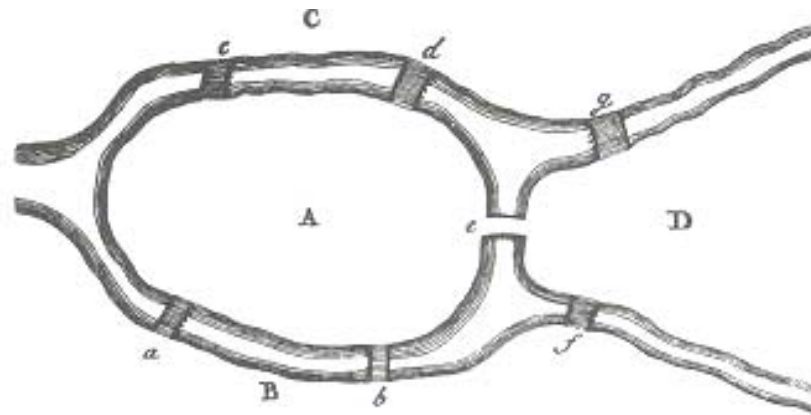


# 目录

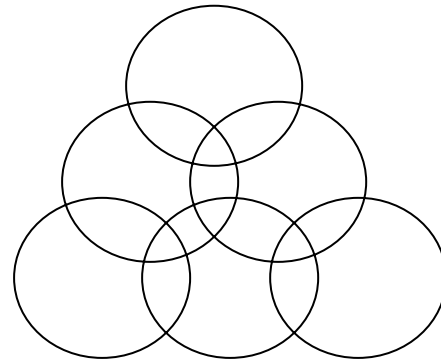
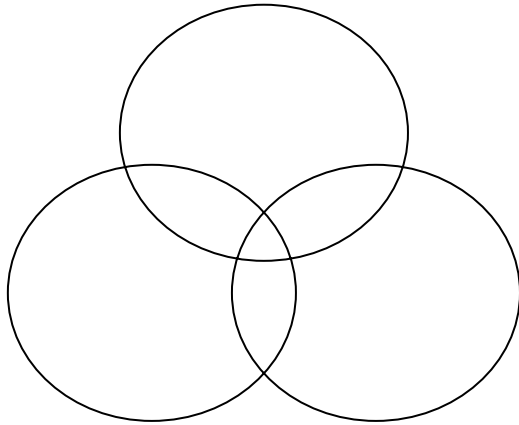
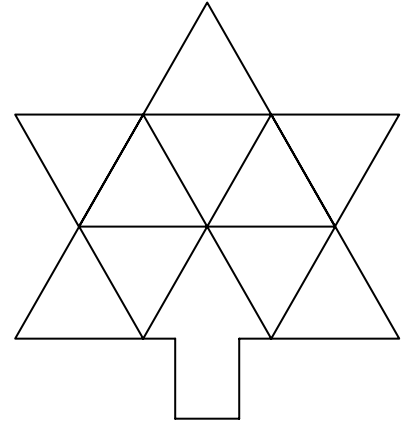
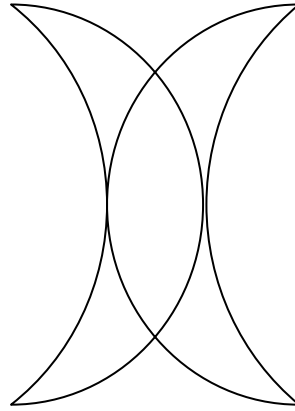
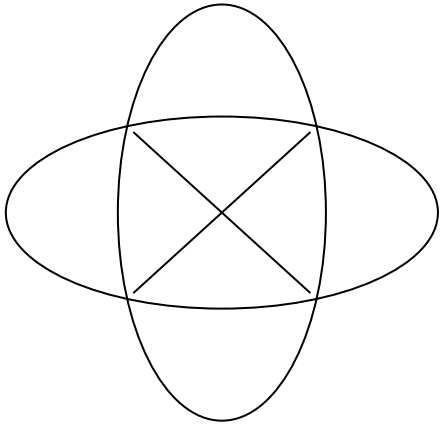
- 二部图
- 欧拉图
- 哈密顿图
- 平面图

# 七桥问题

- 1736年，欧拉提出“七桥问题”，图论诞生



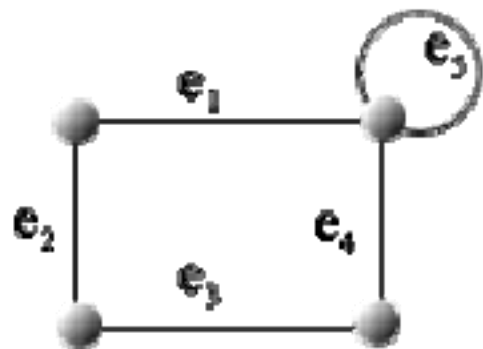
# 一笔画



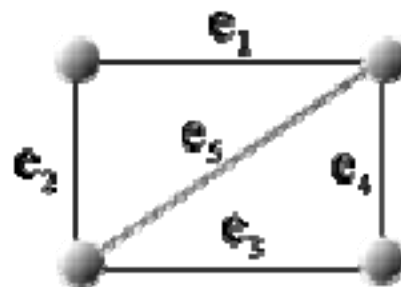
# 欧拉图

- 欧拉通路: 经过图中所有边的简单通路
- 欧拉回路: 经过图中所有边的简单回路
- 欧拉图: 有欧拉回路的图

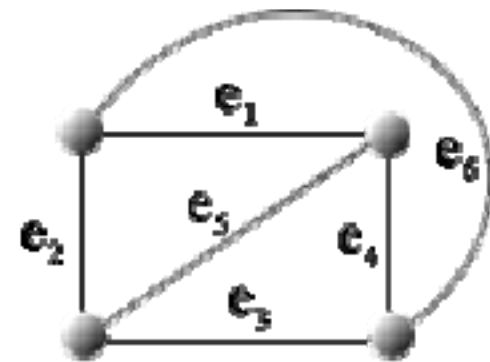
- 在下面各图中，  
哪些存在欧拉回路？  
哪些存在欧拉通路？



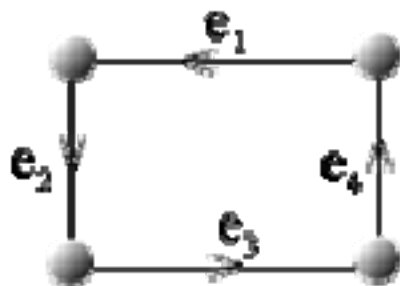
(1)



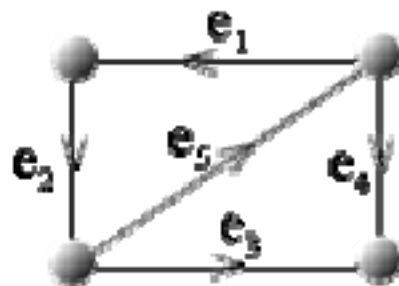
(2)



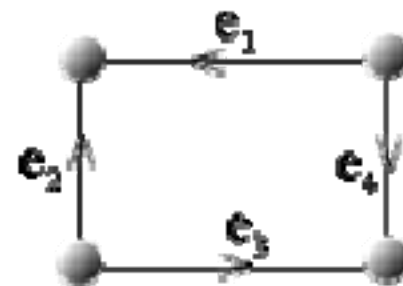
(3)



(4)

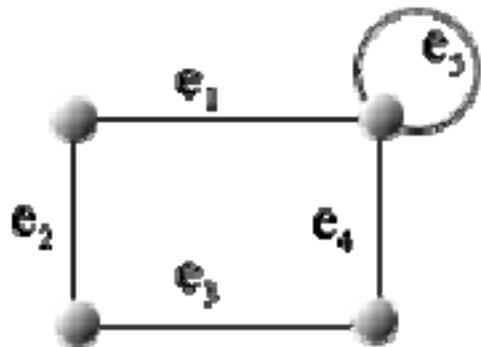


(5)

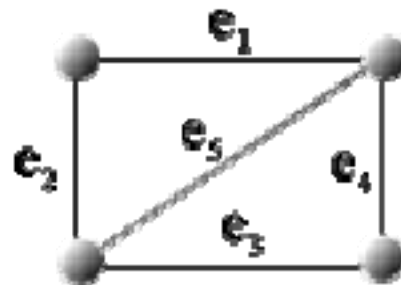


(6)

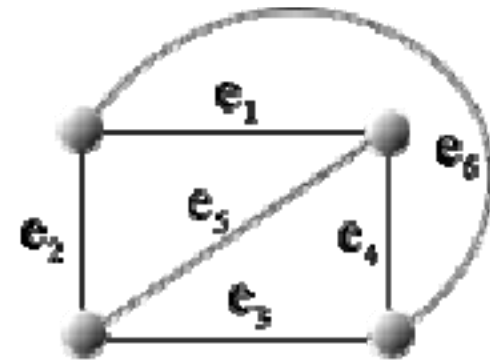
- 在下面各图中，图1,4中存在欧拉回路，是欧拉图，图2中存在欧拉通路，但不存在欧拉回路，不是欧拉图。图3,5,6中既没有欧拉回路，也没有欧拉通路，不是欧拉图。



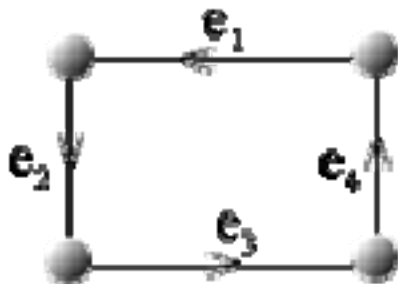
(1)



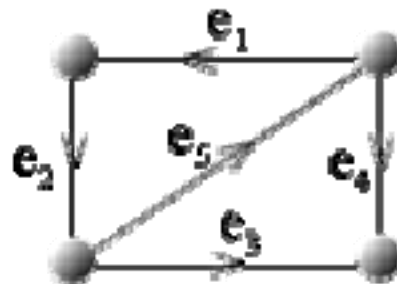
(2)



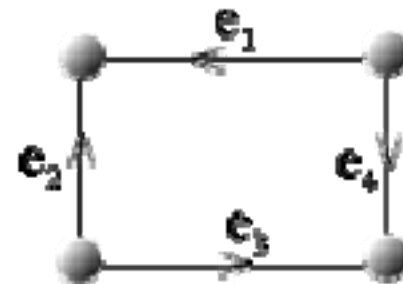
(3)



(4)



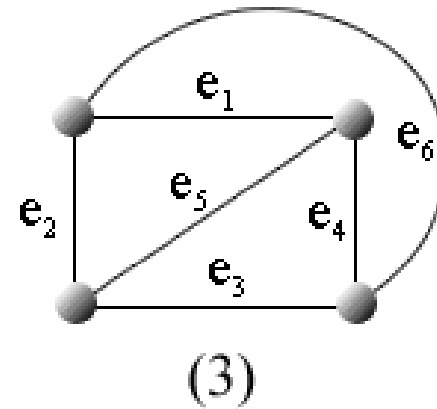
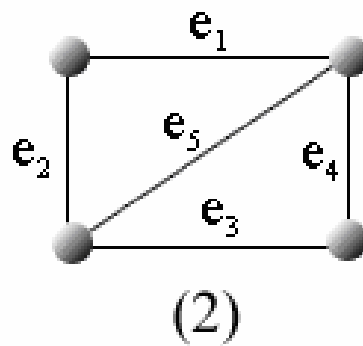
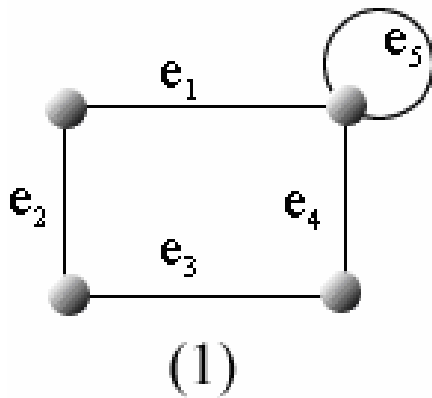
(5)



(6)

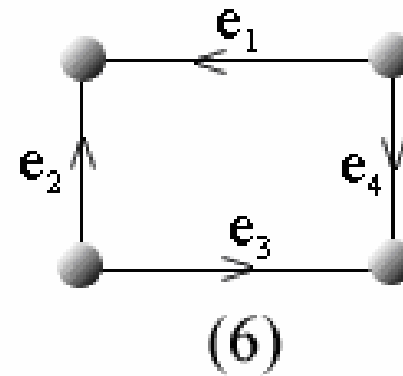
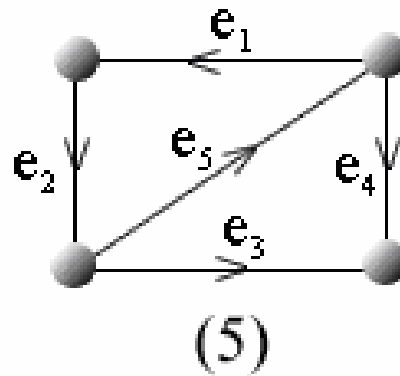
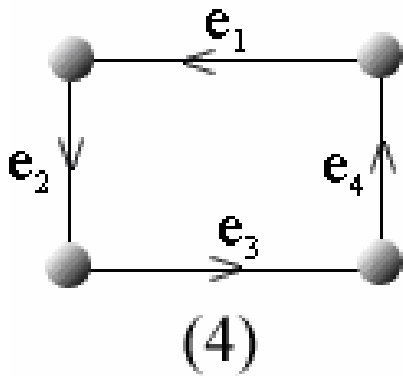
# 无向欧拉图的判别

- 定理：无向图 $G$ 具有欧拉通路，当且仅当 $G$ 是连通图且无奇度顶点或有两个奇度顶点。若无奇度顶点，则通路为回路，若有两个奇度顶点，则它们是每条欧拉通路的端点。
- 推论：无向图 $G$ 是欧拉图当且仅当 $G$ 是连通图，且 $G$ 中没有奇度顶点。

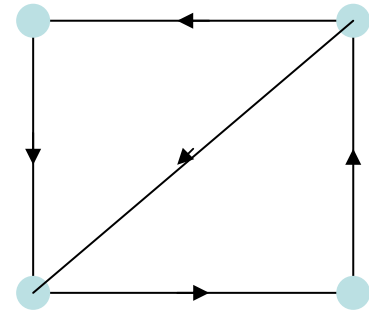
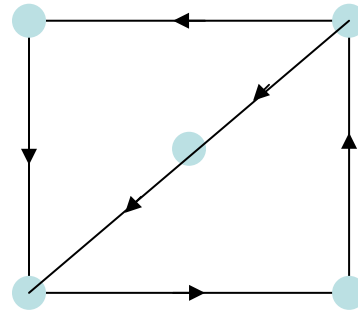
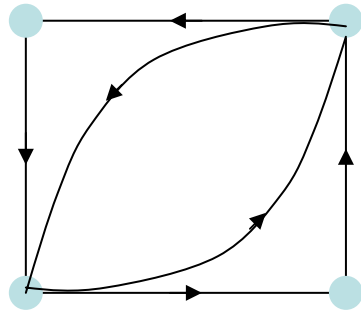
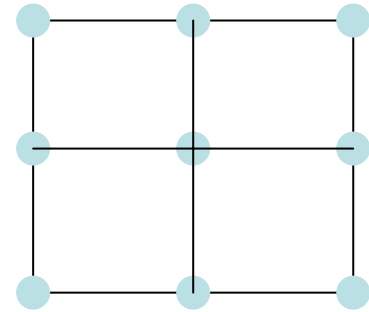
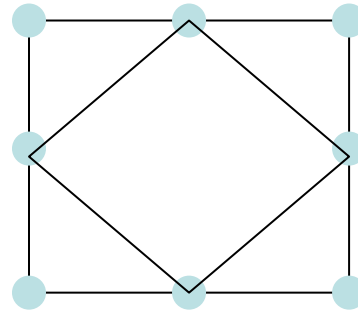
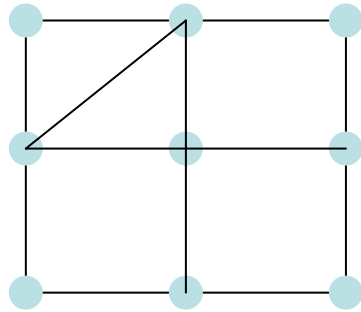


# 有向欧拉图的判别

- 定理：有向图 $D$ 具有欧拉通路，当且仅当 $D$ 是连通图且 $D$ 中除了两个例外顶点之外，其余顶点的入度都等于出度，这两个例外顶点中，一个的入度比出度大1，另一个的出度比入度大1。
- 推论：有向图 $D$ 是欧拉图当且仅当 $D$ 是连通图，且 $D$ 中所有顶点的入度都等于出度。



# 例题

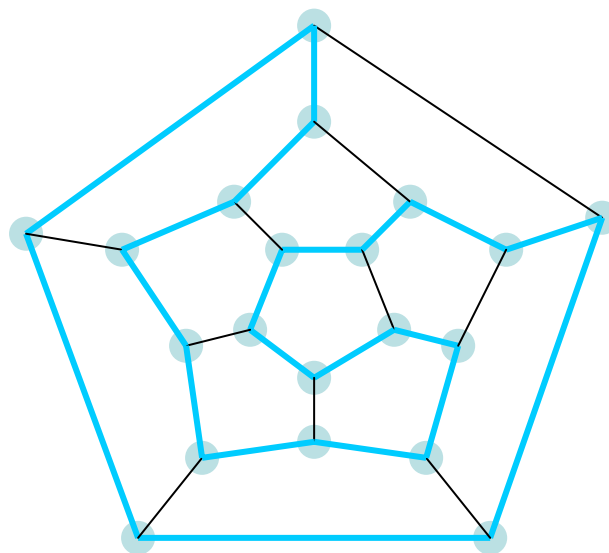
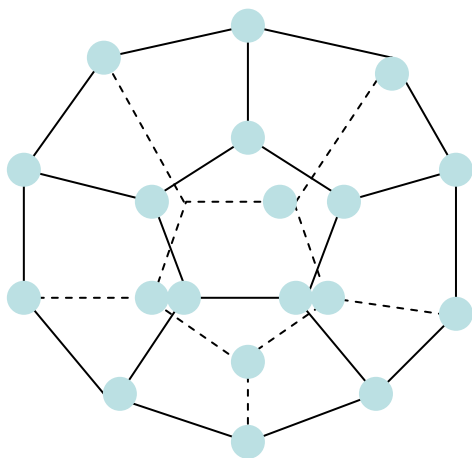


# 目录

- 二部图
- 欧拉图
- 哈密顿图
- 平面图

# 周游世界问题

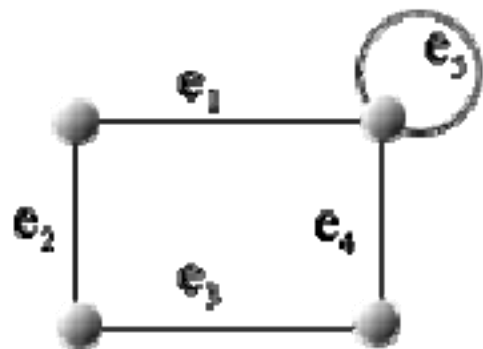
- **1859年**，数学家哈密顿将正十二面体的每个顶点比作一个城市，连接两个顶点之间的边看作城市之间的交通线，提出周游世界问题：能否从某个城市出发沿交通线经过每个城市一次并且仅一次，最后回到出发点？



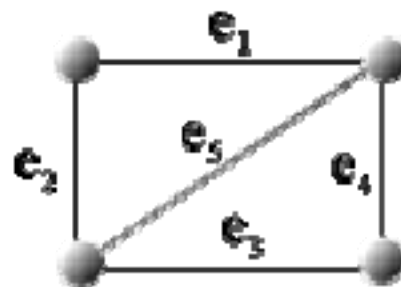
# 哈密顿图

- 哈密顿通路: 经过图中所有顶点的初级通路
- 哈密顿回路: 经过图中所有顶点的初级回路
- 哈密顿图: 有哈密顿回路的图

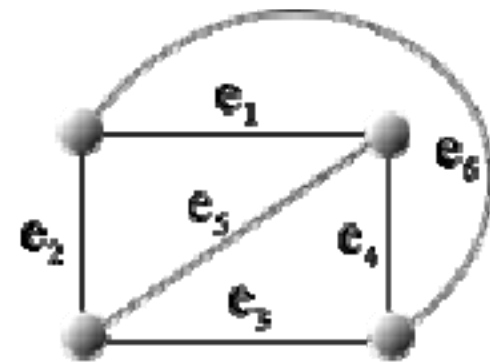
- 在下面各图中，
- 哪些是哈密顿图？ 哪些具有哈密顿通路？



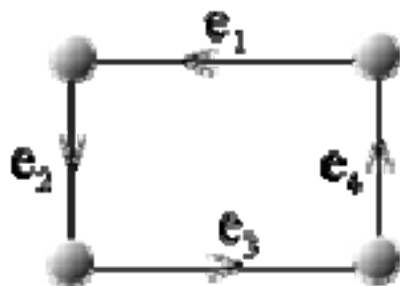
(1)



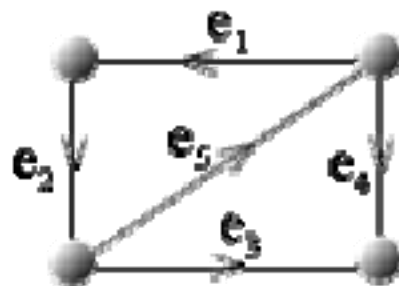
(2)



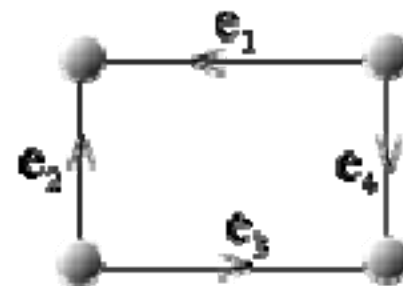
(3)



(4)

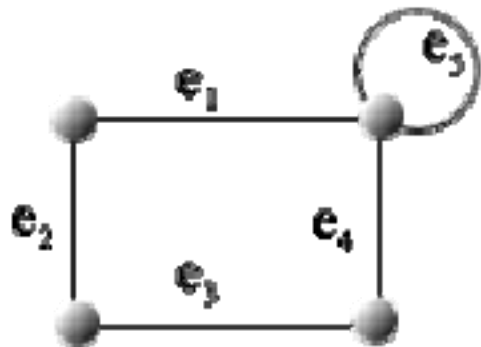


(5)

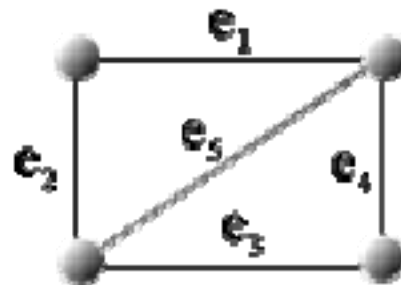


(6)

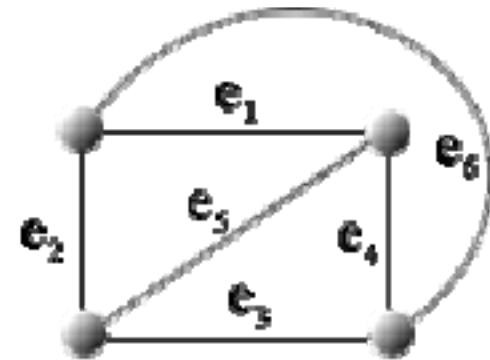
- 在下面各图中，图1，2，3都有哈密顿回路，是哈密顿图。图4具有哈密顿回路，是哈密顿图。图5只有哈密顿通路，但无哈密顿回路，不是哈密顿图，图6中既无哈密顿回路，也没有哈密顿通路，不是哈密顿图。



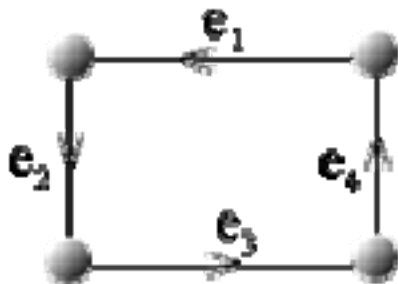
(1)



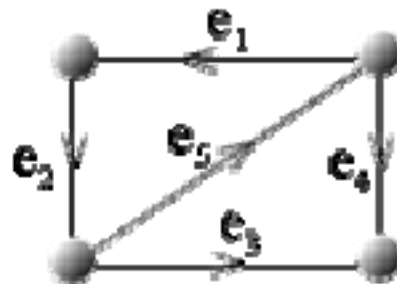
(2)



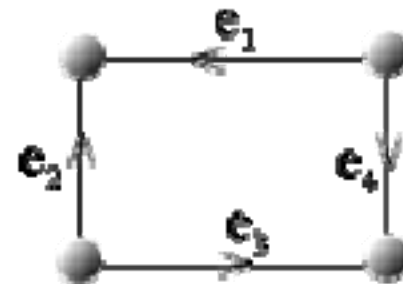
(3)



(4)



(5)



(6)

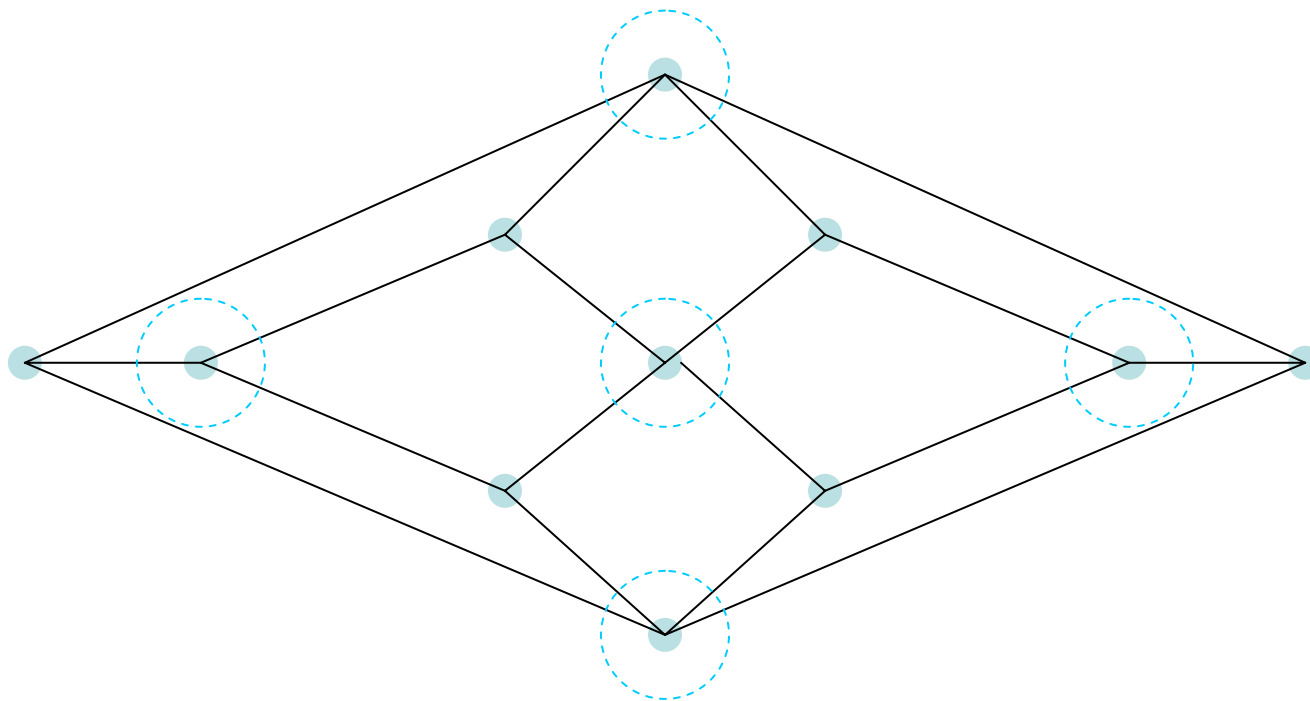
# 无向哈密顿图的必要条件

- 定理: 设 $G=\langle V,E \rangle$ 是无向哈密顿图, 则对 $V$ 的任意非空真子集 $V_1$ 有 $p(G-V_1) \leq |V_1|$ 。
- 证明: 设 $C$ 是 $G$ 中任意哈密顿回路, 则 $V_1$ 中的顶点在 $C$ 中有些相邻, 有些不相邻,  $p(C-V_1) \leq |V_1|$ 。因为 $C$ 是 $G$ 的生成子图, 所以 $p(G-V_1) \leq p(C-V_1) \leq |V_1|$ 。
- 推论: 有割点的图一定不是哈密顿图。

# 举例

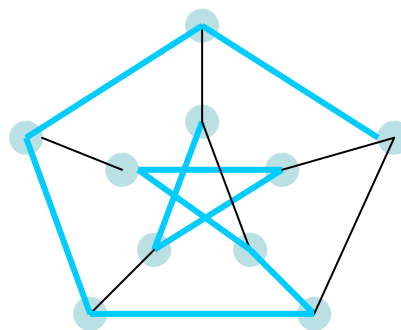
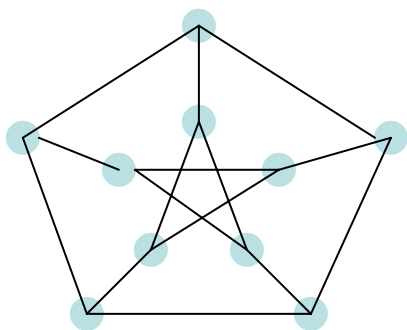
1. 证明：当 $r \neq s$ 时，完全二部图 $K_{r,s}$ 不是哈密顿图。

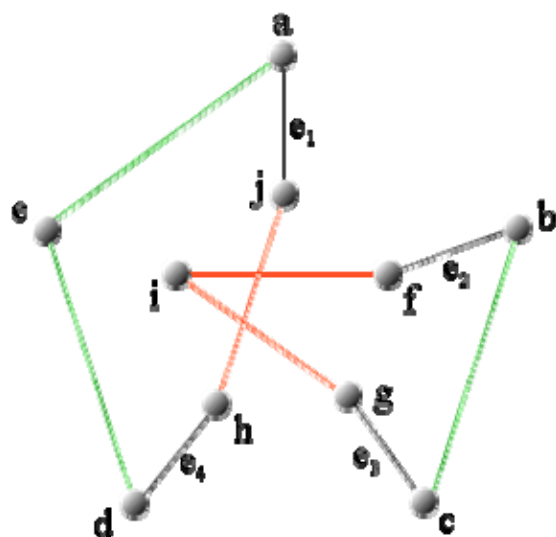
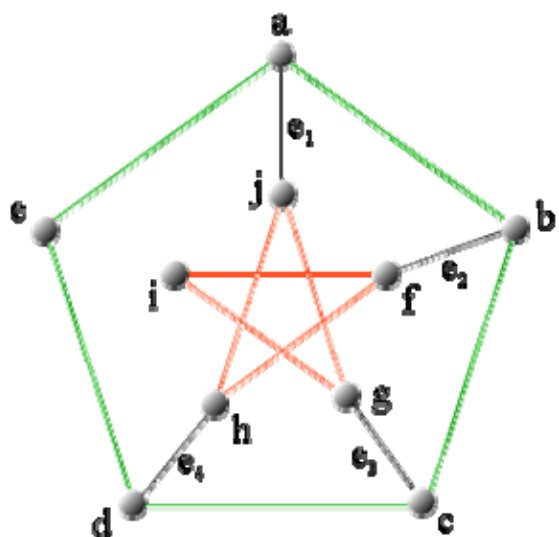
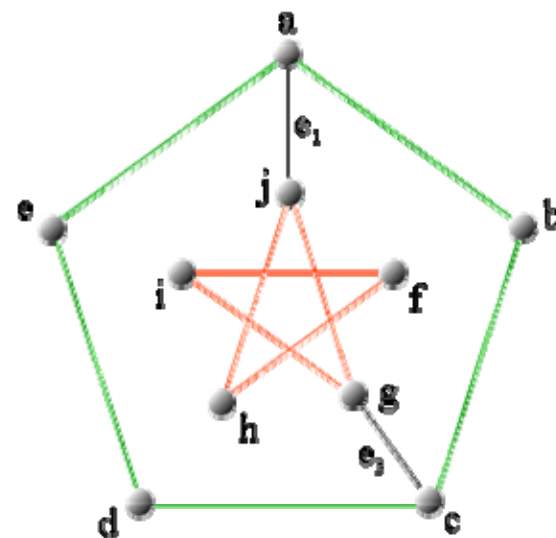
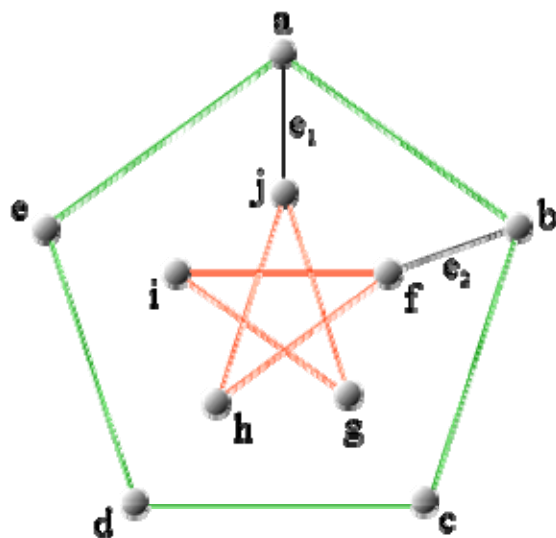
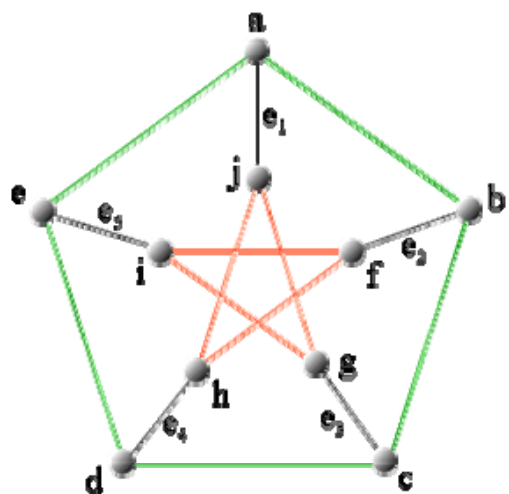
2. 证明：下图不是哈密顿图。



# 反例: 非充分条件

- 反例: 彼得松图
  - 彼得松图满足:  $\forall V_1 \neq \emptyset, p(G-V_1) \leq |V_1|$
  - 彼得松图不是哈密顿图
  - 彼得松图中存在哈密顿通路





度数为2  
的顶点关  
联的两条  
边必须出  
现在哈密  
顿回路上

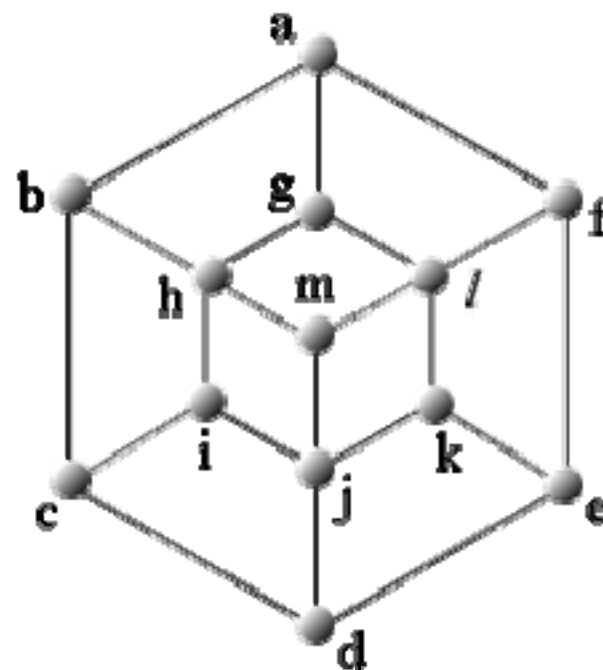
# 无向哈密顿图的充分条件

- 定理：设 $G$ 是 $n(\geq 3)$ 阶无向简单图，若对 $G$ 中任意不相邻顶点 $u$ 与 $v$ 均有 $d(u)+d(v)\geq n-1$ ，则 $G$ 中存在哈密顿通路。又若 $d(u)+d(v)\geq n$ ，则 $G$ 是哈密顿图。
- 推论：设 $G$ 是 $n(\geq 3)$ 阶无向简单图，若对 $G$ 中任意顶点 $u$ 有 $d(u)\geq n/2$ ，则 $G$ 是哈密顿图。
- 完全图 $K_n$ 当 $n \geq 3$ 时是哈密顿图。完全二部图 $K_{r,s}$ 当 $r=s \geq 2$ 时是哈密顿图。

# 例题

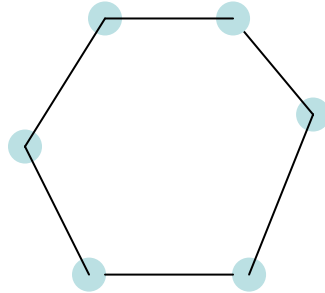
1. 某国际会议共有8人参加，他们来自不同的国家。已知他们中任何两个无共同语言的人中的每一个，与其余有共同语言的人数之和大于或等于8，问能否将这8个人排在圆桌旁，使其任何人都能与两边的人交谈。

2. 下面的图是哈密顿图吗？证明你的结论。



# 反例: 非必要条件

- 反例, 例如圈图 $C_6$



- 目前尚未找到哈密顿图的简单的充要条件, 只有一些必要条件和充分条件。判断一个图不是哈密顿图, 靠破坏必要条件 (连通、度数为2的顶点关联的两条边必须出现在哈密顿回路上、删除顶点等等.....)。判断一个图是哈密顿图, 看是否能找出一条哈密顿回路, 或是否满足充分条件。

# 有向哈密顿图的充分条件

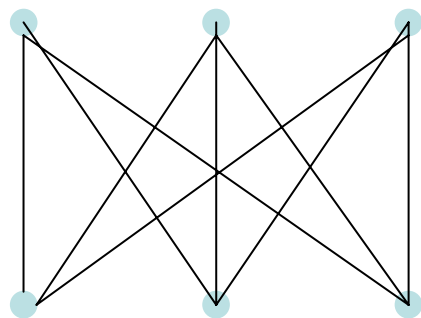
- 定理：设 $D$ 是 $n(\geq 2)$ 阶有向简单图，如果略去所有有向边的方向，所得无向图中含有生成子图 $K_n$ ，则 $D$ 中存在哈密顿通路。
- 推论： $n(\geq 3)$ 阶有向完全图都是哈密顿图。

# 目录

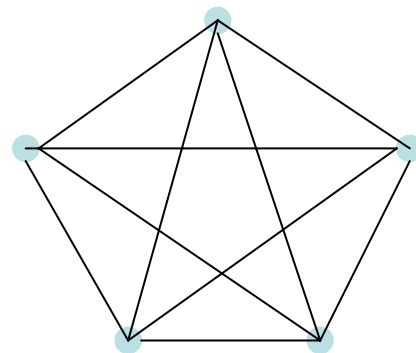
- 二部图
- 欧拉图
- 哈密顿图
- 平面图
  - 平面图的概念
  - 欧拉公式
  - 库拉图斯基定理
  - 平面图的对偶图

# 平面图

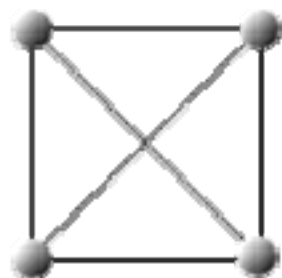
- 定义：如果图 $G$ 能以这样的方式画在平面上，即除顶点处外无边相交，则称 $G$ 为平面图。画出的无边相交的图称为 $G$ 的平面嵌入或平面表示。无平面嵌入的图称为非平面图。



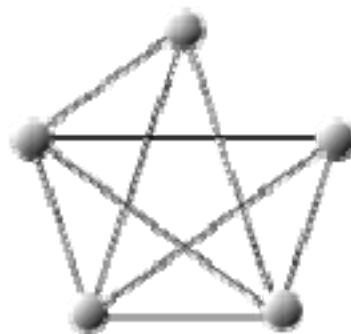
库拉图斯基图 $K_{3,3}$



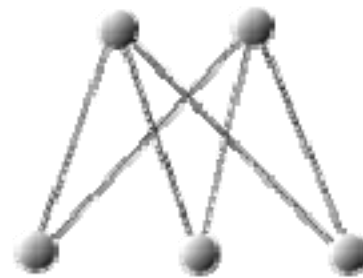
库拉图斯基图 $K_5$



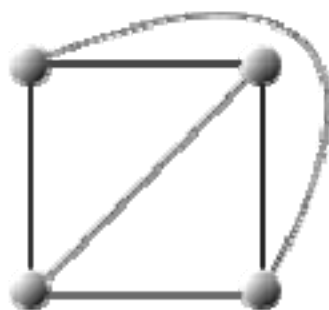
(1)



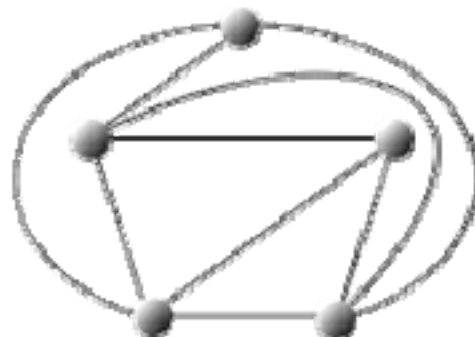
(2)



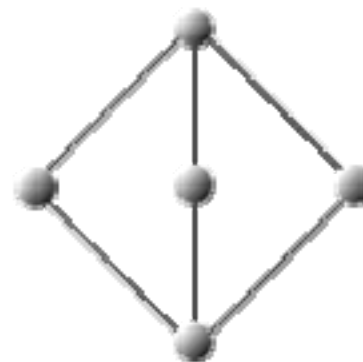
(3)



(4)



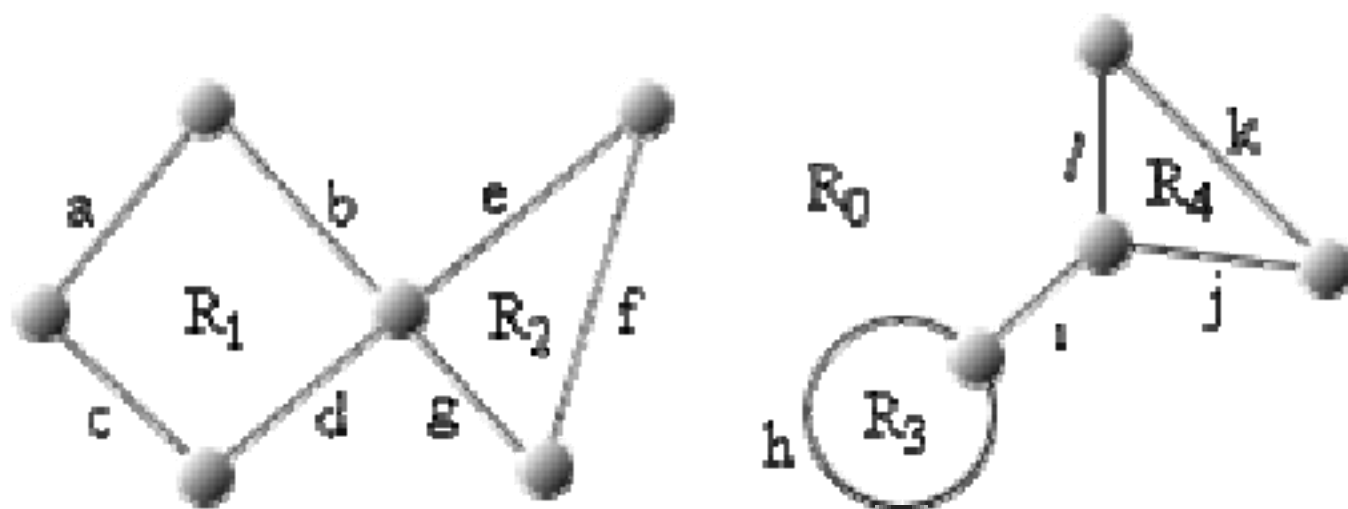
(5)



(6)

# 面和面的次数

- 定义：设 $G$ 是平面图，由 $G$ 的边将 $G$ 所在的平面划分成若干个区域，每个区域都称为 $G$ 的一个面。其中面积无限的面称为无限面或外部面，面积有限的面称为有限面或内部面。包围每个面的所有边组成的回路组称为该面的边界，边界的长度称为该面的次数。常记外部面为 $R_0$ ，内部面为 $R_1, R_2, \dots, R_k$ ，面 $R_i$ 的次数记为 $\deg(R_i)$ 。
- 定理：平面图 $G$ 中所有面的次数之和等于边数 $m$ 的两倍。



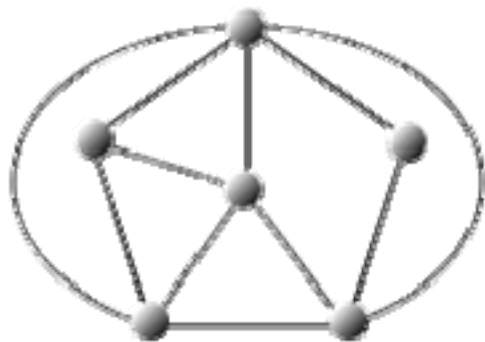
- 有5个面。  $R_1$  的边界为圈  $abdc$ ,  $\deg(R_1)=4$ 。  $R_2$  的边界是  $efg$ ,  $\deg(R_2)=3$ 。  $R_3$  的边界为环  $h$ ,  $\deg(R_3)=1$ 。  $R_4$  的边界为圈  $kjl$ ,  $\deg(R_4)=3$ 。 外部面  $R_0$  的边界由一个简单回路  $abefgdc$  和一个复杂回路  $kjihil$  组成,  $\deg(R_0)=13$ 。

# 极大平面图

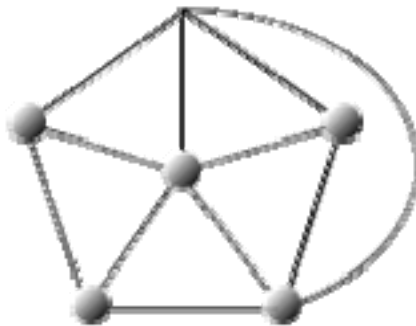
- 极大平面图是简单平面图，但是在任意两个不相邻顶点之间加边就变成非平面图。
- $K_n$ ，当 $n \leq 4$ 时都是极大平面图。 $K_5$ 删除任意一条边所得图也是极大平面图。
- 定理：设 $G$ 为 $n(n \geq 3)$ 阶简单连通的平面图， $G$ 为极大平面图当且仅当 $G$ 的每个面的次数均为3。

# 极大平面图

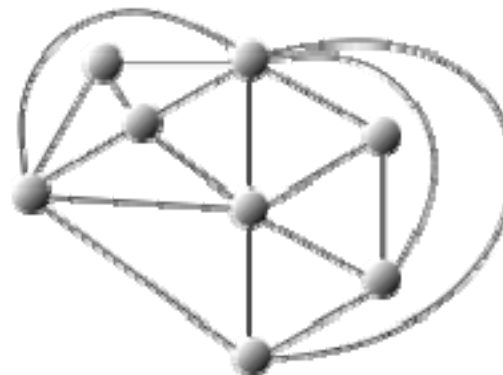
- 在下面所示的各平面图中，只有(3)是极大平面图。



(1)



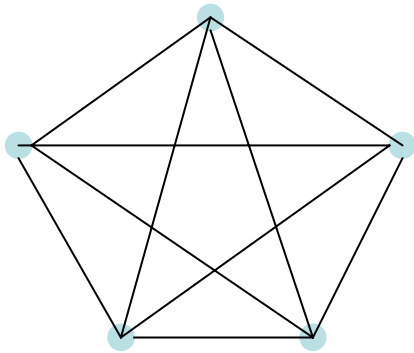
(2)



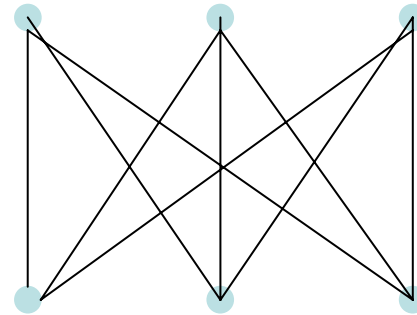
(3)

# 极小非平面图

- 极小非平面图是非平面图, 但是删除任意一条边就是平面图。
- $K_5$ 和 $K_{3,3}$ 都是极小非平面图。

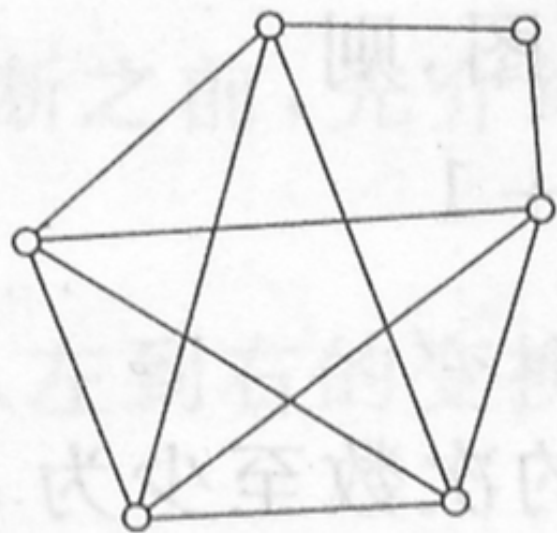


库拉图斯基图 $K_5$

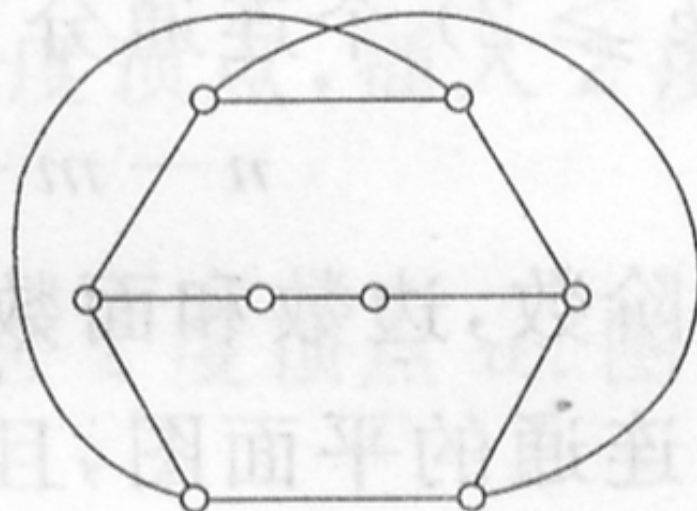


库拉图斯基图 $K_{3,3}$

图 6.38 所示两个图也都是极小非平面图.



(a)



(b)

图 6.38

# 欧拉公式

- 欧拉公式：对于任意的连通的平面图**G**有

$$n-m+r=2,$$

其中， $n$ ， $m$ ， $r$ 分别为**G**的顶点数，边数和面数。

- 欧拉公式的推广：对于具有 $k(k \geq 2)$ 个连通分支的平面图**G**，有

$$n-m+r = k+1$$

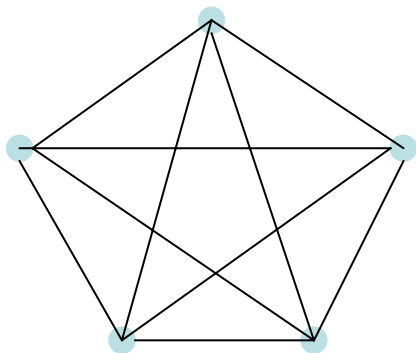
其中 $n$ ， $m$ ， $r$ 分别为**G**的顶点数，边数和面数。

# 平面图的边数 $m$ 与顶点数 $n$ 的关系

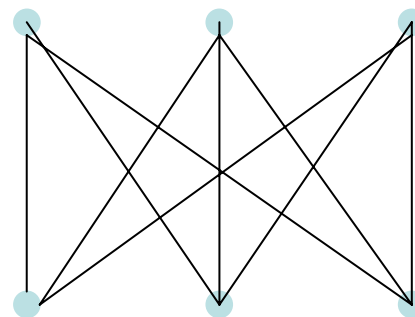
- 定理：设 $G$ 是连通平面图,  $G$ 的各面的次数至少是 $l$  ( $\geq 3$ ), 则 $m \leq (n-2) l / (l-2)$ 。

# 平面图 的边数 $m$ 与顶点数 $n$ 的关系

- 推论： $K_5$ 与 $K_{3,3}$ 都不是平面图。



库拉图斯基图 $K_5$



库拉图斯基图 $K_{3,3}$

# 平面图的边数 $m$ 与顶点数 $n$ 的关系

- 定理：设 $G$ 是有 $k(k \geq 2)$ 个连通分支的平面图,  $G$ 的各面的次数至少是 $l (\geq 3)$ , 则 $m \leq (n-k-1) l / (l-2)$ 。

# 例题

- 证明：设 $G$ 是 $n(n \geq 3)$ 阶 $m$ 条边的简单连通平面图，则 $m \leq 3n - 6$ 。

# 例题

- 证明：设 $G$ 是 $n(n \geq 3)$ 阶 $m$ 条边的简单平面图，则 $m \leq 3n - 6$ 。

# 例题

- 证明：设 $n(\geq 3)$ 阶简单极大平面图 $G$ 有 $m$ 条边，则  $m=3n-6$ .

# 例题

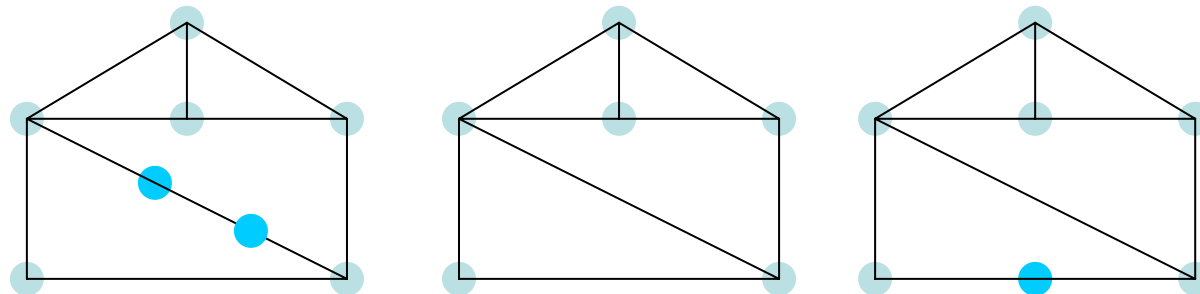
- 证明：设 $G$ 是简单平面图，则 $G$ 的最小度 $\delta \leq 5$ 。

# 同胚

- 插入2度顶点: 把 $(u,v)$ 变成 $(u,w),(w,v)$
- 删除2度顶点:  $\deg(w)=2$ , 把 $(u,w),(w,v)$ 变成 $(u,v)$

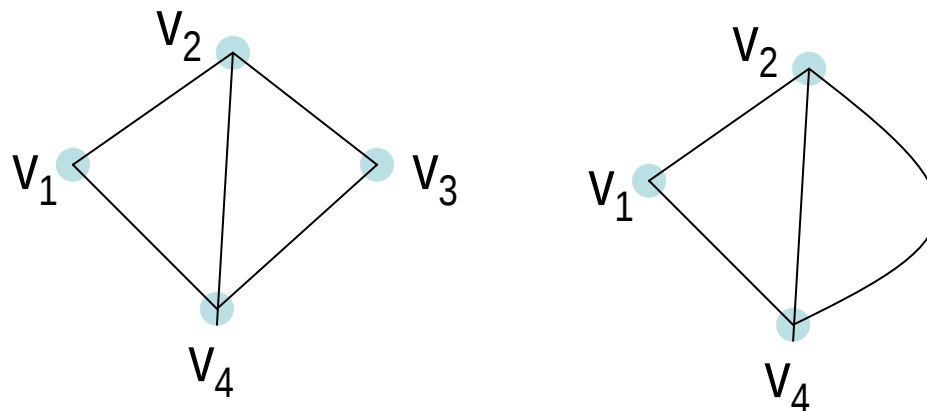


- 同胚: 反复插入或删除2度顶点后同构



# 收缩

- 图 $G$ 中边 $(u,v)$ 的收缩由下面的方法给出：删除边 $(u,v)$ ，将 $u$ 与 $v$ 重合，所得顶点记为 $u$ (或 $v$ )，使 $u$ (或 $v$ )关联除边 $(u,v)$ 外，原来 $u$ 与 $v$ 关联的一切边。

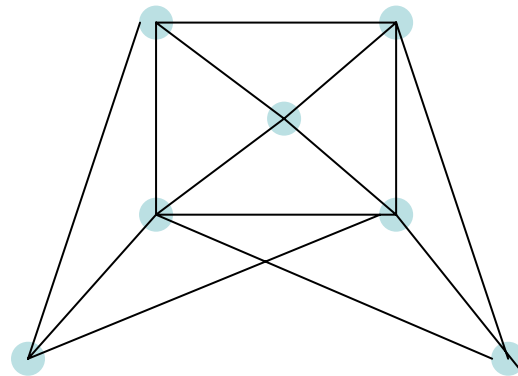
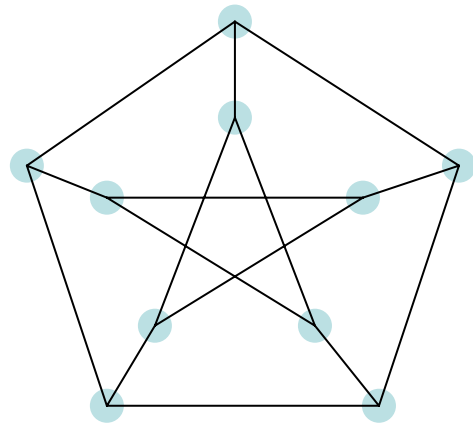


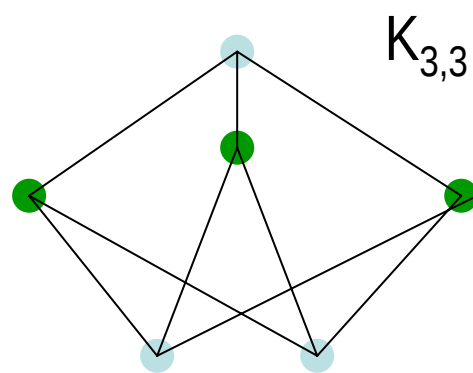
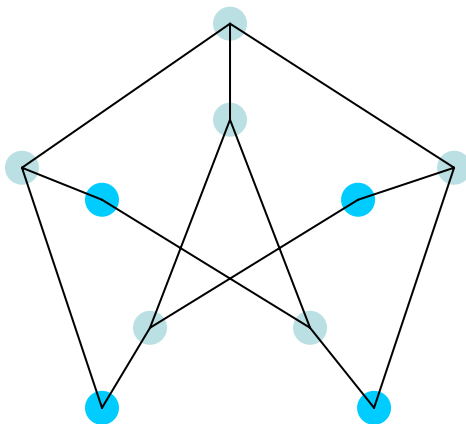
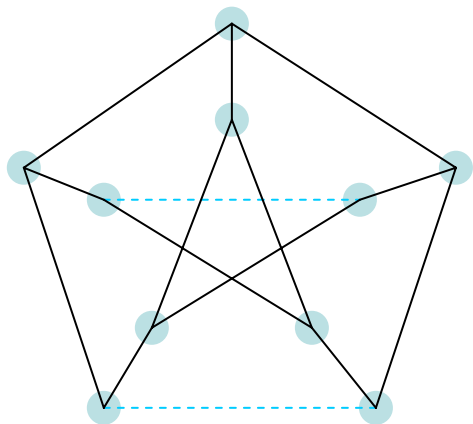
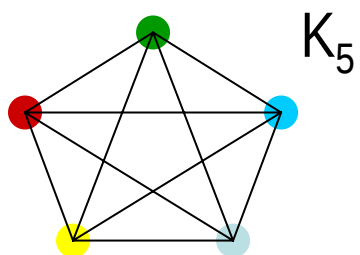
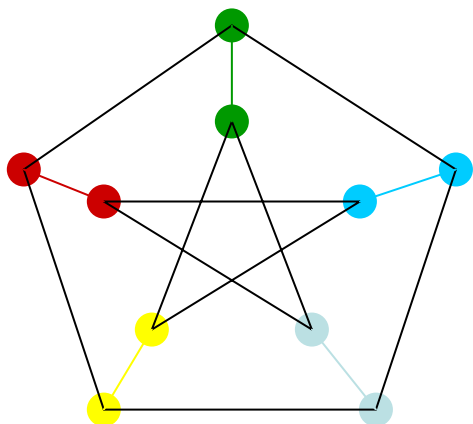
# 库拉图斯基定理

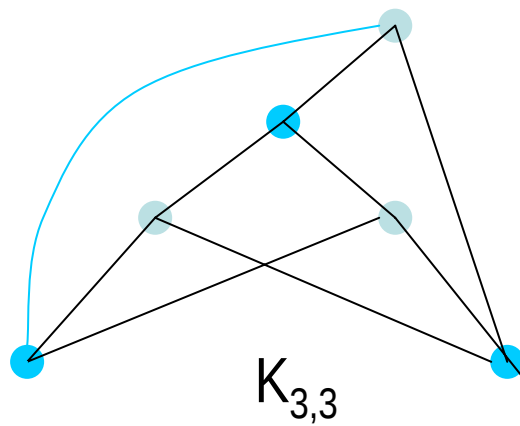
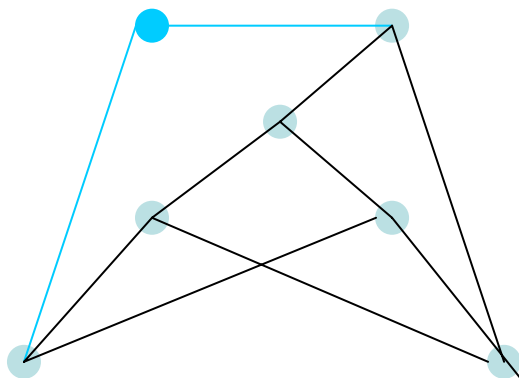
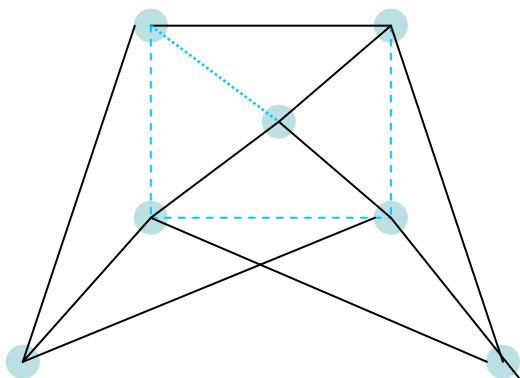
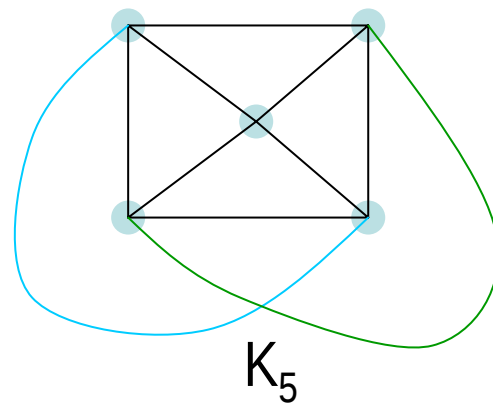
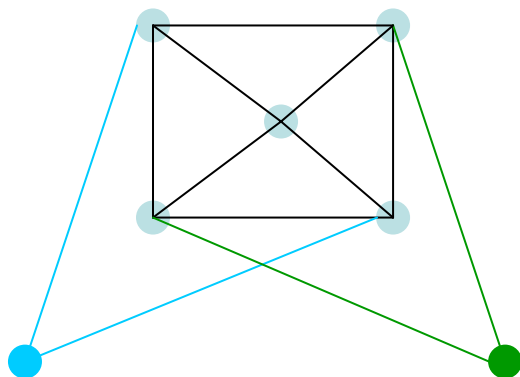
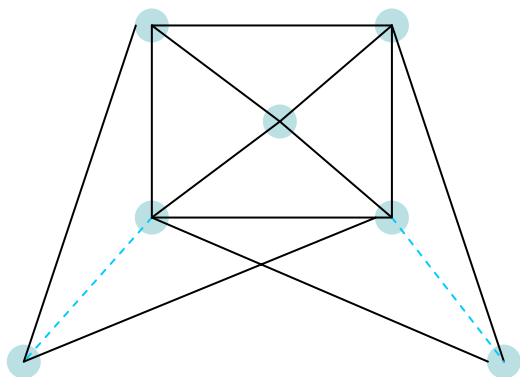
- 第1种叙述形式:  
一个图是平面图当且仅当它不含与 $K_5$ 同胚子图,也不含与 $K_{3,3}$ 同胚子图.
- 第二种叙述形式:  
一个图是平面图当且仅当它没有可以收缩到 $K_5$ 的子图,也没有收缩到 $K_{3,3}$ 的子图.

# 例题

判断以下两个图是否是平面图

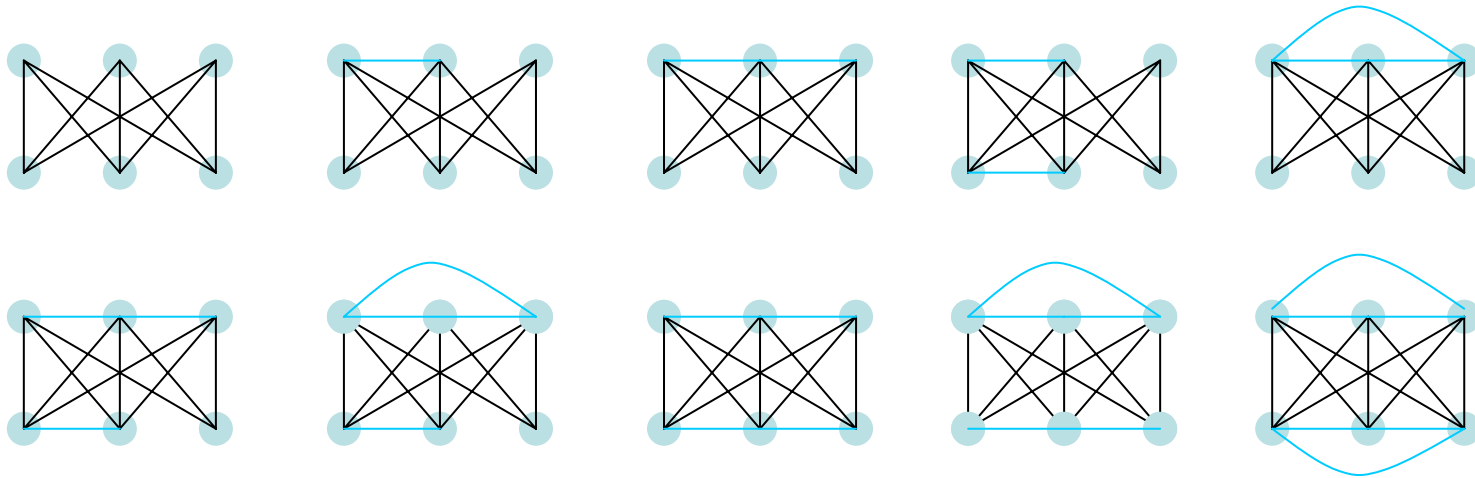






# 例题

- $K_6$ 的含 $K_{3,3}$ 的非同构子图有哪些？



- 解:  $K_6$ 有15条边,  $K_{3,3}$ 有9条边, 分别给 $K_{3,3}$ 加0,1,2,3,4,5,6条边, 共10种.

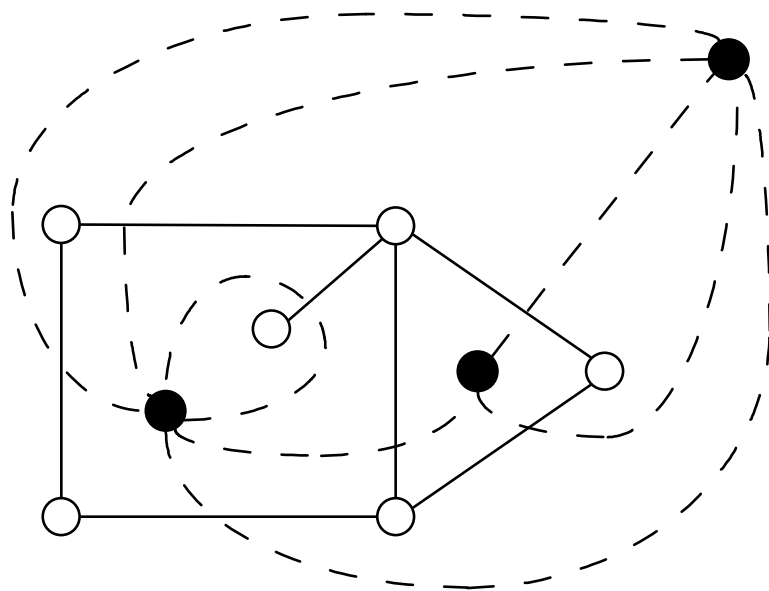
# 对偶图

设平面图 $G=\langle V,E \rangle$ ,  $G$ 有 $r$ 个面,  $n$ 个顶点,  $m$ 条边  
用如下的方法构造 $G^*$ :

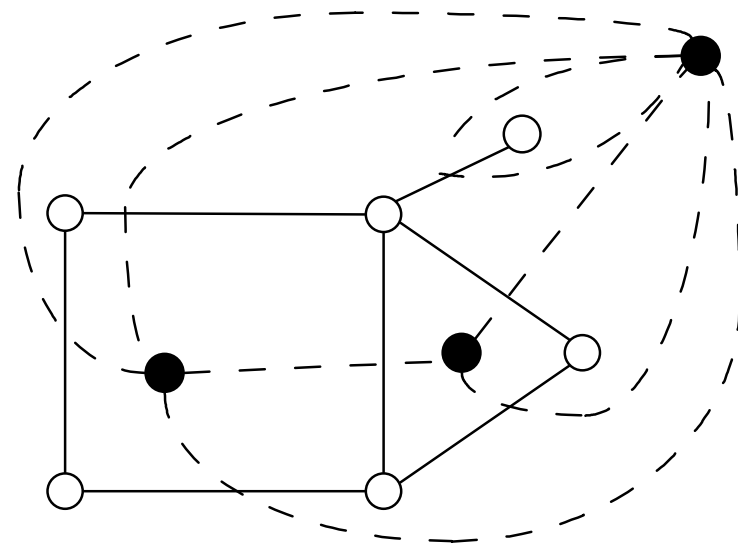
- (1)在 $G$ 的面 $R_i$ 中任取一个顶点 $v_i^*$ 作为 $G^*$ 的顶点,  $G^*$ 的顶点集 $V^*=\{v_1^*, v_2^*, \dots, v_r^*\}$ ,
- (2)若面 $R_i$ 和 $R_j$ 的边界中有公共边 $e_k$ , 连接对应顶点 $v_i^*$ 和 $v_j^*$ , 得 $G^*$ 的边 $e_k^*$ 与 $e_k$ 相交。当 $e_k$ 只在 $G$ 的一个面 $R_i$ 的边界中出现时, 以 $R_i$ 中的顶点 $v_i^*$ 为顶点做环 $e_k^*$ ,  $e_k^*$ 为 $G^*$ 中一个环。设 $G^*$ 的边集为 $E^*$ , 由于 $G^*$ 的边数与 $G$ 的边数相同, 则 $E^*=\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*\}$ ,

称 $G^*=\langle V^*, E^* \rangle$ 为 $G$ 的对偶图.

# 例



(a)



(b)

同构平面图的对偶图，不一定是同构的。

# 性质

设 $G^*$ 是连通平面图 $G$ 的对偶图， $n^*$ ， $m^*$ ， $r^*$ 和 $n$ ， $m$ ， $r$ 分别为 $G^*$ 和 $G$ 的顶点数，边数，面数， $G^*$ 的顶点 $v_i^*$ 位于 $G$ 的面 $R_i$ 中，则

(1)  $n^* = r$

(2)  $m^* = m$

(3)  $r^* = n$

(4)  $d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i)$

若前提改为 $G$ 具有 $k(\geq 2)$ 个连通分支则 $r^* = n - k + 1$

# 例题

- 证明：平面图 $G$ 的对偶图 $G^*$ 为欧拉图当且仅当 $G$ 的每个面的次数均为偶数。

# 例题

- 证明：若 $G$ 为二部图并且是平面图，则 $G$ 的对偶图均为欧拉图。

# 作业

- 6.5
- 6.15
- 6.25
- 6.36
- 6.50