



## 集合论与图论09

### 图的矩阵表示

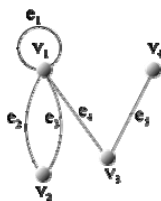
何英华  
hyh@tju.edu.cn

## 目录

- 无向图的关联矩阵
- 有向无环图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

## 定义

- 设  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , 令  $m_{ij}$  为顶点  $v_i$  与边  $e_j$  的关联次数, 则称  $(m_{ij})_{n \times m}$  为  $G$  的关联矩阵, 记作  $M(G)$ .



$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 性质

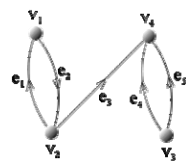
1.  $M(G)$  每列元素之和均为2, 这正说明每条边关联两个顶点 (环所关联的两个端点重合)。
2.  $M(G)$  第  $i$  行元素之和为  $v_i$  的度数,  $i=1, 2, \dots, n$ .
3.  $M(G)$  所有元素之和为  $2m$ , 这个结果正是握手定理的内容, 即各顶点的度数之和等于边数的2倍
4. 第  $j$  列与第  $k$  行相同, 当且仅当边  $e_j$  与  $e_k$  是平行边。
5.  $M(G)$  第  $i$  行元素之和为0当且仅当  $v_i$  是孤立点。

## 目录

- 无向图的关联矩阵
- 有向无环图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

## 定义

- 设  $D = \langle V, E \rangle$  中无环,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , 令
- $$m_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的始点} \\ 0 & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 不关联} \\ -1 & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$
- 则称  $(m_{ij})_{n \times m}$  为  $D$  的关联矩阵, 记作  $M(D)$ .



$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

## 性质

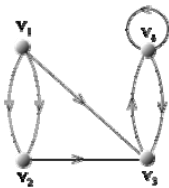
1.  $M(D)$ 中每一列的元素之和为零,从而 $M(D)$ 中所有元素之和为0.
2.  $M(D)$ 中,负1的个数等于正1的个数,都等于边数 $m$ ,这正是有向图握手定理的内容.
3. 第 $i$ 行中,正1的个数等于 $d^+(v_i)$ ,负1的个数等于 $d^-(v_i)$ .
4. 平行边所对应的列相同.

## 目录

- 无向图的关联矩阵
- 有向无环图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

## 定义

- 设有向图 $D=\langle V, E \rangle$ ,  $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 $v_i$ 邻接到顶点 $v_j$ 的边数,称 $(a_{ij}^{(1)})_{n \times n}$ 为 $D$ 的邻接矩阵,记作 $A(D)$ ,或简记为 $A$ .



$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 性质

1. 第 $i$ 行的元素之和为 $v_i$ 的出度,各顶点的出度之和为 $D$ 中的边数.
2. 第 $j$ 列的元素之和为 $v_j$ 的入度,各顶点的入度之和为 $D$ 中的边数.
3.  $A(D)$ 中所有元素之和为 $D$ 中长度为1的通路总数,而主对角线上元素之和为 $D$ 中长度为1的回路(环)的个数.

## 定理

- **定理:** 设 $A$ 为有向图 $D$ 的邻接矩阵,  $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为 $D$ 的顶点集,则 $A$ 的 $l$ 次幂 $A^l$  ( $l \geq 1$ )中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 为 $D$ 中 $v_i$ 到 $v_j$ 长度为 $l$ 的通路数,其中 $a_{ii}^{(l)}$ 为 $v_i$ 到自身长度为 $l$ 的回路数,而 $\sum_{i,j} a_{ij}^{(l)}$ 为 $D$ 中长度为 $l$ 的通路总数,其中 $\sum_{i,j} a_{ii}^{(l)}$ 为 $D$ 中长度为 $l$ 的回路总数.

## 定理

- 设 $B_l = A + A^2 + \dots + A^l$  ( $l \geq 1$ ),则 $B_l$ 中元素 $b_{ij}^{(l)}$ 为 $D$ 中 $v_i$ 到 $v_j$ 长度小于或等于 $l$ 的通路数,  $\sum_{i,j} b_{ij}^{(l)}$ 为 $D$ 中长度小于或等于 $l$ 的通路数,其中 $\sum_{i,j} b_{ii}^{(l)}$ 为 $D$ 中长度小于或等于 $l$ 的回路数.

$$A(D) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

不难看出， $D$ 中 $v_2$ 到 $v_4$ 的长度为1,2,3,4的通路分别为0, 1, 1, 2条。  
 $v_4$ 到自身长度为1, 2, 3, 4的回路分别为1, 2, 3, 5条，其中有复杂回路。 $D$ 中长度小于或等于4的通路有53条，其中有15条为回路。

## 目录

- 无向图的关联矩阵
- 有向无环图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

## 定义

- 设 $D=\langle V, E \rangle$ 为有向图。 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，令
 
$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{可达} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$
 称 $(p_{ij})_{n \times n}$ 为 $D$ 的可达矩阵，记作 $P(D)$ ，简记为 $P$ 。
- $P(D)$ 主对角线上的元素全为1。
- $D$ 强连通当且仅当 $D$ 的可达矩阵为全1矩阵。

## 例题

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## 例题

只要计算出 $B^{n-1}$ ，由 $B^{n-1}$ 中的元素 $b_{ij}^{(n-1)}$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ，且 $i \neq j$ ) 是否为0就可以写出有向图 $D$ 的可达矩阵，不过， $p_{ii}$ 总为1 ( $i=1, 2, \dots, n$ )，它不由 $b_{ii}^{(n-1)}$ 的值确定。

$$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- ## 作业
- 6.5
  - 6.15
  - 6.25
  - 6.36
  - 6.50