



集合论与图论09

图的矩阵表示

何英华

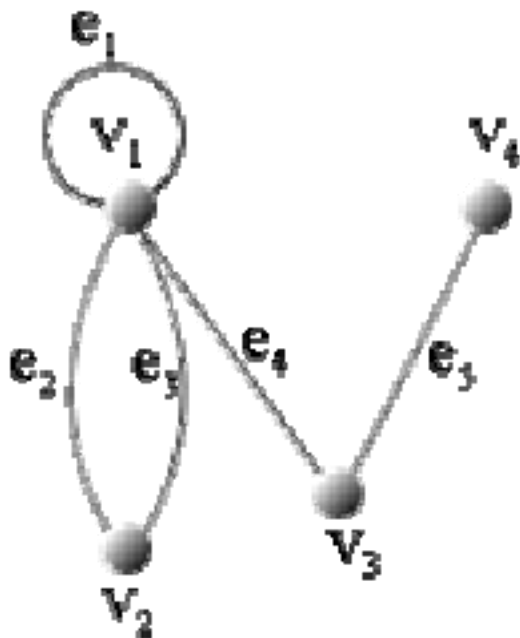
hyh@tju.edu.cn

目录

- 无向图的关联矩阵
- 有向无环图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

定义

- 设 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 m_{ij} 为顶点 v_i 与边 e_j 的关联次数, 则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 G 的关联矩阵, 记作 $M(G)$.



$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

性质

1. $M(G)$ 每列元素之和均为2，这正说明每条边关联两个顶点（环所关联的两个端点重合）。
2. $M(G)$ 第 i 行元素之和为 v_i 的度数， $i=1,2,\dots,n$.
3. $M(G)$ 所有元素之和为 $2m$ ，这个结果正是握手定理的内容，即各顶点的度数之和等于边数的2倍
4. 第 j 列与第 k 行相同，当且仅当边 e_j 与 e_k 是平行边。
5. $M(G)$ 第 i 行元素之和为0当且仅当 v_i 是孤立点。

目录

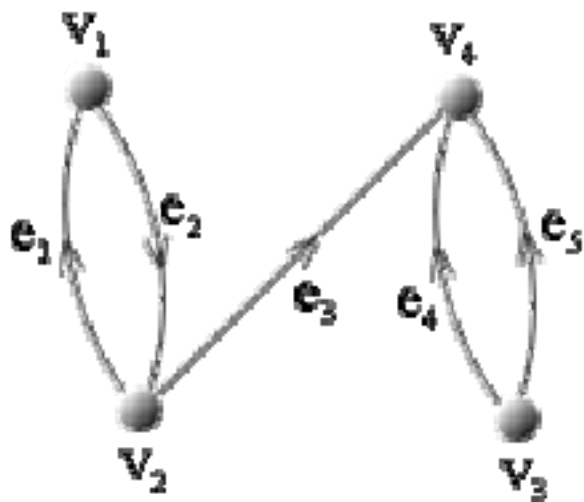
- 无向图的关联矩阵
- 有向无环图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

定义

- 设 $D = \langle V, E \rangle$ 中无环, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的始点} \\ 0, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 不关联} \\ -1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 D 的关联矩阵, 记作 $M(D)$.



$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

性质

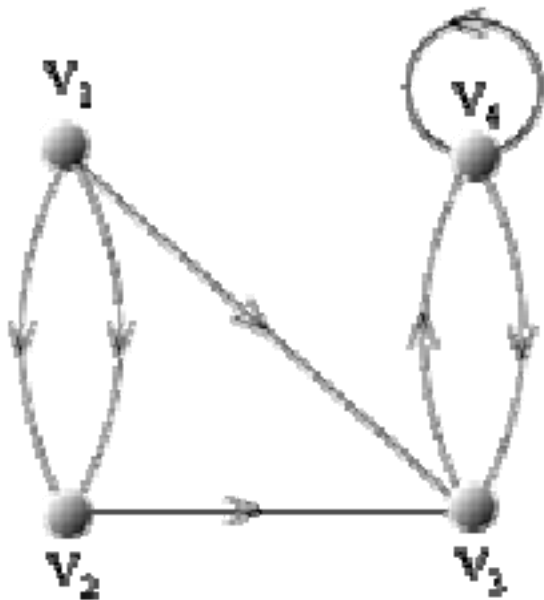
1. $M(D)$ 中每一列的元素之和为零，从而 $M(D)$ 中所有元素之和为0.
2. $M(D)$ 中，负1的个数等于正1的个数，都等于边数 m ，这正是有向图握手定理的内容。
3. 第 i 行中，正1的个数等于 $d^+(v_i)$ ，负1的个数等于 $d^-(v_i)$.
4. 平行边所对应的列相同。

目录

- 无向图的关联矩阵
- 有向无环图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

定义

- 设有向图 $D=<V,E>$, $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 边的条数, 称 $(a_{ij}^{(1)})_{n \times n}$ 为 D 的邻接矩阵, 记作 $A(D)$, 或简记为 A .



$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

性质

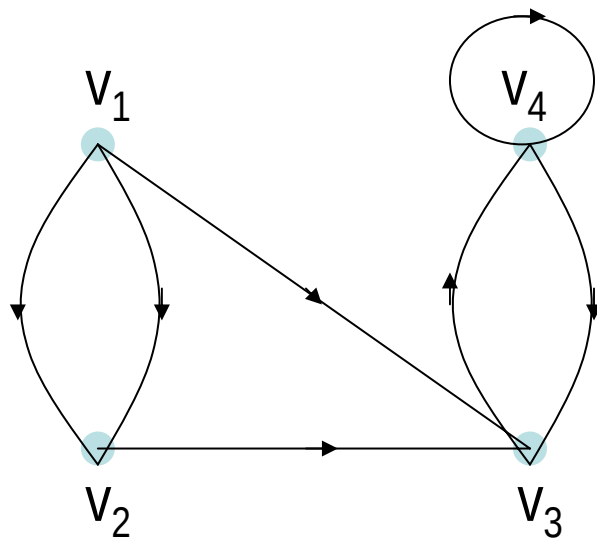
1. 第 i 行的元素之和为 v_i 的出度，各顶点的出度之和为 D 中的边数。
2. 第 j 列的元素之和为 v_j 的入度，各顶点的入度之和为 D 中的边数。
3. $A(D)$ 中所有元素之和为 D 中长度为1的通路总数，而主对角线上元素之和为 D 中长度为1的回路（环）的个数。

定理

- 定理：设 A 为有向图 D 的邻接矩阵， $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为 D 的顶点集，则 A 的 l 次幂 A^l ($l \geq 1$) 中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数，其中 $a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数，而 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数，其中 $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数。

定理

- 设 $B_l = A + A^2 + \dots + A^l$ ($l \geq 1$), 则 B_l 中元素 $b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度小于或等于 l 的通路数, $\sum_{i,j \in V} b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的通路数, 其中 $\sum_{i \in V} b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的回路数。



$$A(D) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B^4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

不难看出，D中 v_2 到 v_4 的长度为1,2,3,4的通路分别为0, 1, 1, 2条。
 v_4 到自身长度为1, 2, 3, 4的回路分别为1, 2, 3, 5条，其中有复杂回路。D中长度小于或等于4的通路有53条，其中有15条为回路。

目录

- 无向图的关联矩阵
- 有向无环图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

定义

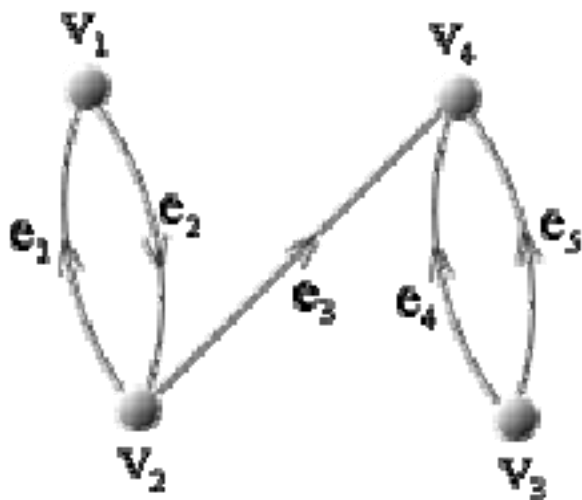
- 设 $D=\langle V, E \rangle$ 为有向图。 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 令

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{可达} v_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

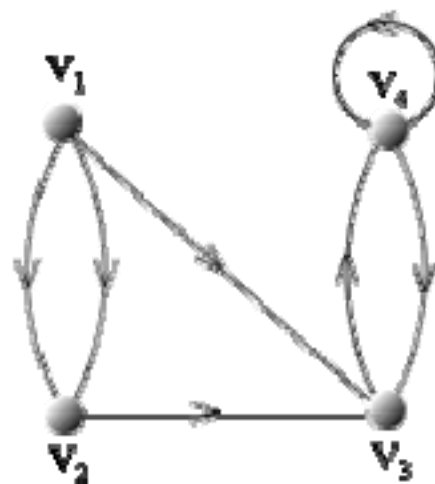
称 $(p_{ij})_{n \times n}$ 为 D 的可达矩阵, 记作 $P(D)$, 简记为 P .

- $P(D)$ 主对角线上的元素全为1。
- D 强连通当且仅当 D 的可达矩阵为全1矩阵。

例题



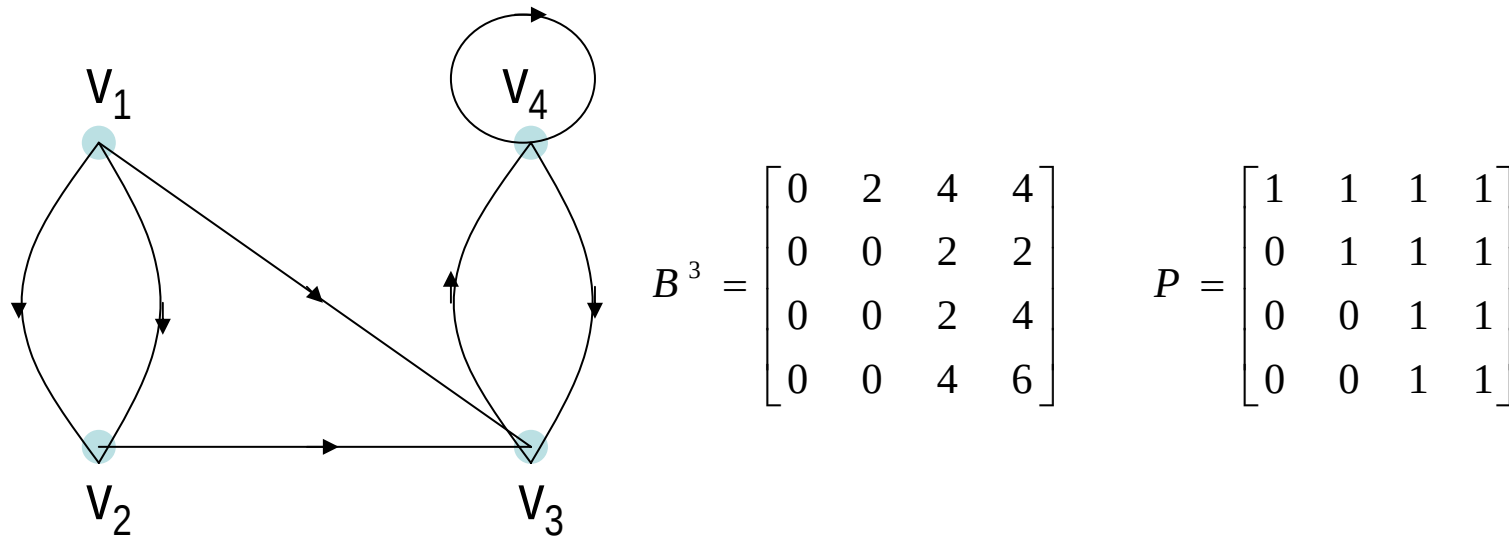
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

例题

只要计算出 B^{n-1} ，由 B^{n-1} 中的元素 $b_{ij}^{(n-1)}$ ($i, j=1, 2, \dots, n$ ，且 $i \neq j$) 是否为0就可以写出有向图 D 的可达矩阵，不过， p_{ii} 总为1 ($i=1, 2, \dots, n$)，它不由 $b_{ij}^{(n-1)}$ 的值确定。



作业

- 6.5
- 6.15
- 6.25
- 6.36
- 6.50