集合论与图论08

图的连通性

何英华

hyh@tju.edu.cn

目录

- 通路与回路
- 无向图的连通性与连通度
- 有向图的连通性及其分类

定义

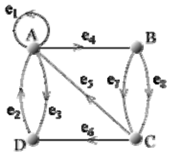
- 顶点与边的交替序列$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$称为$v_0$到$v_l$的通路，其中，$v_{i-1}$和$v_i$为$e_i$的端点，$i=1,2,\ldots,l$， v_0,v_l分别称为Γ的始点与终点，Γ中边的条数l称为它的长度。若$v_0=v_l$，则称通路为回路。
- 若Γ的所有边各异，则称Γ为简单通路，又若$v_0=v_l$，则称Γ为简单回路。

定义

- 若Γ的v_0与v_l以外所有顶点各异，所有边也各异，则称Γ为初级通路或路径，此时又若$v_0=v_l$，则称Γ为初级回路或圈。将长度为奇数的圈称为奇圈，长度为偶数的圈称为偶圈。
- 若Γ中有边重复出现，则称Γ为复杂通路，又若$v_0=v_l$，则称Γ为复杂回路。

例题

例：设有向图D=<V,E>如下图所示，在图中找出长度为4的简单回路和圈，并以子图形式画出它们。



解：长度为4的简单回路共16条，以子图形式画出时，它们是4个子图。长度为4的圈共8个，以子图形式画出时，它们是2个子图。

几点说明

- 回路是通路的特殊情况。
- 初级通路(回路)是简单通路(回路)，但反之不真。
- 通路(回路)的表示法
  - 用顶点与边的交替序列表示：$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$
  - 用边的序列表示：$\Gamma=e_1e_2\ldots e_l$
  - 在简单图中也可以用顶点序列表示：$\Gamma=v_0v_1\ldots v_l$
- 在无向图中，长为1的圈包含环，长为2的圈包含平行边，因而在简单无向图中，圈的长度至少为3。在有向图中，长为1的圈包含环，因而在简单有向图中，圈的长度至少为2。

性质

- **定理**：在n阶图G中，若从顶点u到v（u≠v）存在通路，则从u到v存在长度小于或等于n-1的初级通路。

性质

- **定理**：在一个n阶图G中，若存在v到自身的回路，则一定存在v到自身长度小于或等于n的初级回路。

例题

(1)无向完全图K_n（n≥3）中有几种非同构的圈？

(2)顶点依次标定为a,b,c的无向完全图K_3中有多少个不同的圈？

解(1) n-2; (2) 6

目录

一、无向图的连通性

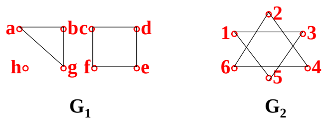
- 在无向图G中，若顶点u和v之间存在通路，则称**u与v是连通的**。对于G中的任一顶点，规定它与自身是连通的。
- 若无向图G是平凡图，或G中任何两个顶点都是连通的，则称G为连通图，否则称G是非连通图。
- 例：完全图K_n(n≥1)都是连通图，而零图N_n(n≥2)都是非连通图。

二、连通分支

- 无向图中顶点之间的连通关系
  R={(u,v) | u,v∈V且u与v之间有通路}
  是一个等价关系。
- 设无向图G=<V,E>，V关于顶点之间的连通关系R的商集V/R={V_1,V_2,…,V_k}，V_i为等价类，称导出子图G[V_i](i=1,2,…,k)为G的连通分支，连通分支数k记为p(G)。
- 若G为连通图，则p(G)=1。若G为非连通图，则p(G)≥2。n阶零图是连通分支最多的，p(N_n)=n。

例题

- 求下面各图中V关于连通关系R的商集V/R，并计算连通分支的个数。



三、短程线，距离

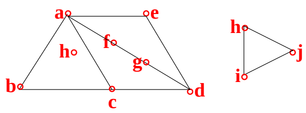
- 设u,v为无向图G中任意两个顶点，若u与v是连通的，则称u,v之间长度最短的通路为u,v之间的**短程线**，短程线的长度称为u,v之间的**距离**，记作d(u,v)。当u,v不连通时，规定d(u,v)=∞。

- 距离有以下性质：
  1. d(u,v)≥0，u=v时，等号成立。
  2. 具有对称性，d(u,v)=d(v,u)。
  3. 满足三角不等式：d(u,v)+d(v,w)≥d(u,w)

- 在完全图K_n(n≥2)中，任何两个顶点之间的距离都是1。在n阶零图N_n(n≥2)中，任何两个顶点之间的距离都为∞。

例题

- 下图中a与d之间的短程线有2条，d(a,d)=2， a与g之间的短程线有1条，d(a,g)=2，易知d(a,b)=1，d(a,h)= ∞。

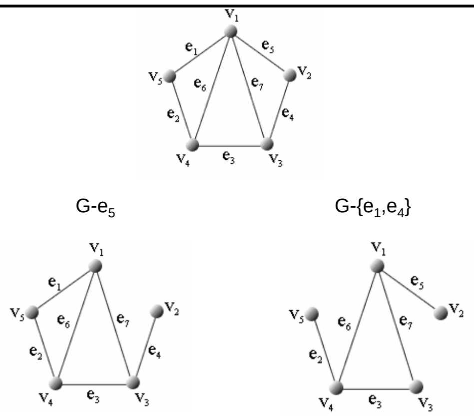


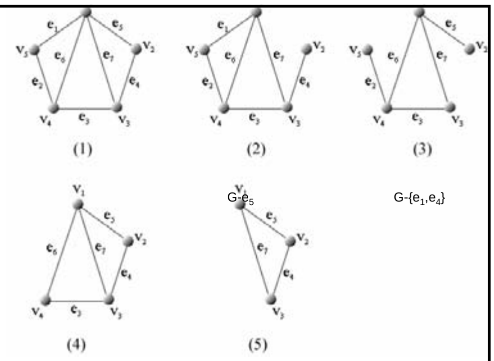
四、删除边(集)和顶点(集)

- 设G=<V，E>为无向图。设e∈E，从G中去掉边e，称为**删除边e**，并用G-e表示从G中删除e所得子图。又设E'⊆E，从G中删除E'中所有的边，称为**删除E'**，并用G-E'表示删除E'后所得子图。

四、删除边(集)和顶点(集)

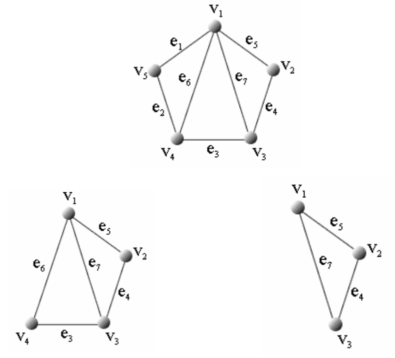
- 设G=<V，E>为无向图。设v∈V，从G中去掉v及所关联地一切边称为**删除顶点v**，并用G-v表示删除v后所得子图。又设V'⊆V，称从G中删除V'中所有顶点为**删除V'**，并用G-V'表示所得子图。





G-$\{e_1,e_4\}$

G-v_5 G-$\{v_4,v_5\}$



G-v_5 G-$\{v_4,v_5\}$

五、割集

- 点割集：无向图G=<V,E>，∅≠V'⊂V，满足 (1) p(G-V')>p(G)；(2)∀V''⊂V'，p(G-V'')=p(G)，则称V'为点割集。
- 割点：v是割点 ⇔ {v}是点割集

五、割集

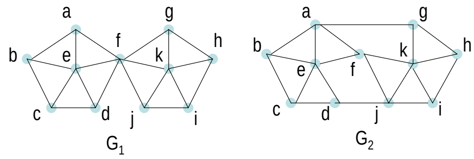
- 边割集：无向图G=<V,E>，∅≠E'⊂E，满足 (1) p(G-E')>p(G)；(2)∀E''⊂E'，p(G-E'')=p(G)，则称E'为边割集
- 割边 (桥)：(u,v)是割边 ⇔ {(u,v)}是边割集

- 令**G=<V,E>**是连通无向图, 结点集合V_1 , $V_1 \subseteq V$, 如果删去V_1中所有结点后,**G**就变得不连通了, 而删去V_1的任何真子集中的所有结点,得到的子图仍然连通.则称V_1是**G**的一个点割集.
- 如果点割集V_1中只有一个结点, 则称此结点为割点.

- 令**G=<V,E>**是连通无向图, 边的集合E_1,$E_1 \subseteq E$, 如果删去E_1中所有边后,**G**就变得不连通了, 而删去E_1的任何真子集中的所有边,得到的子图仍然连通.则称E_1是**G**的一个边割集.
- 如果边割集E_1中只有一条边, 则称此边为割边, 也称之为桥.

例题

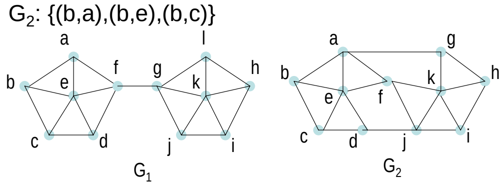
- G_1: {f}，{a,e,c}，{g,k,j}，~~{b,e,f,k,h}~~
- G_2: ~~{f}~~，{a,e,c}，{g,k,j}，{b,e,f,k,h}



•G_1中f是割点, G_2中无割点

例题

- G_1: {(a,f),(e,f),(d,f)}， {(g,l),(g,k),(j,k),(j,i)}，
  ~~{(a,f),(e,f),(d,f),(g,l),(g,k),(g,j)}~~，~~{(c,d)}~~
- G_2: {(b,a),(b,e),(b,c)}



• G_1中(f,g)是桥，G_2中无桥

说明

1）完全图无点割集

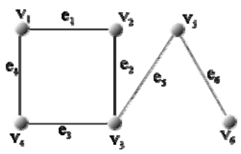
2）零图既无点割集，也无边割集

3）若G是连通图，E'是G的边割集，则p(G-E')=2

4）若G是连通图，V'是G的点割集，则p(G-V')≥2

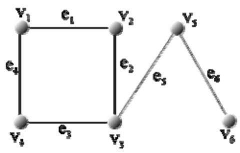
例题

- 哪些是点割集？哪些是割点？
- 哪些是边割集？哪些是桥？



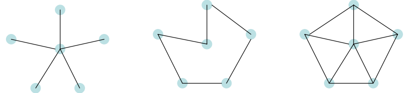
例题

- 点割集：$\{v_2,v_4\}$，$\{v_3\}$，$\{v_5\}$
- 割点：v_3,v_5。
- 注意，v_1与悬挂顶点v_6不在任何割集中。 $\{e_6\}$，$\{e_5\}$，$\{e_2,e_3\}$，$\{e_1,e_2\}$，$\{e_3,e_4\}$，$\{e_1,e_4\}$，$\{e_1,e_3\}$，$\{e_2,e_4\}$都是割集，其中e_6,e_5是桥。



六、连通度

- 问题: 如何定量比较无向图连通性的强与弱?

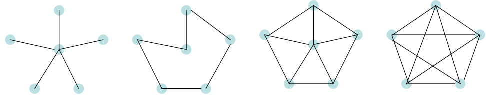


•点连通度: 为了破坏连通性,至少需要删除多少个顶点?
•边连通度: 为了破坏连通性,至少需要删除多少条边?

点连通度

平凡图、有割点的图的κ

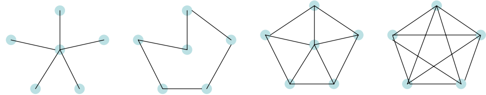
- 点连通度：对于无向非连通图G，$\kappa(G)=0$。对于无向完全图，$\kappa(K_n) = n-1$。 对于无向连通非完全图G，$\kappa(G) = \min\{ |V'| \mid V'$是G的点割集 $\}$
- 例: $\kappa(G)=1$, $\kappa(H)=2$, $\kappa(F)=3$, $\kappa(K_5)=4$



边连通度

平凡图、有割点的图的λ

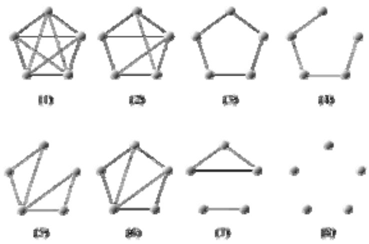
- 边连通度：对于无向非连通图G，$\lambda(G)=0$。对于无向连通图G，$\lambda(G) = \min\{ |E'| \mid E'$是G的边割集$\}$
- 例: $\lambda(G)=1$, $\lambda(H)=2$, $\lambda(F)=3$, $\lambda(K_5)=4$



定理

- 定理：对于任何无向图G，有$\kappa\le\lambda\le\delta$.
- 证明：**(只是一个思路)**
  1) 证明$\lambda\le\delta$。考虑顶点v，$d(v)=\delta$，则可在v关联的边中构造出边割集E', 所以$\lambda\le|E'|\le\delta$。
  2) 证明$\kappa\le\lambda$。设E'是边割集，$|E'|=\lambda$，则可从E'关联的顶点中构造出点割集V',使得$|V'|\le\lambda$, 所以$\kappa\le|V'|\le\lambda$。

- 求下面各图的点连通度、边连通度，并将它们按点连通程度及边连通程度排序。



- $\kappa_1=\lambda_1=4$， $\kappa_2=\lambda_2=3$， $\kappa_3=\lambda_3=2$， $\kappa_4=\lambda_4=1$，$\kappa_5=1,\lambda_5=2$， $\kappa_6=\lambda_6=2$， $\kappa_7=\lambda_7=0$， $\kappa_8=\lambda_8=0$

例题

1）给出一些无向简单图，使得 $\kappa = \lambda = \delta$ 。

2）给出一些无向简单图，使得 $\kappa < \lambda < \delta$ 。

解：

1）n阶无向完全图K_n和n阶零图N_n都满足要求。

2）在两个K_n（$n\geqslant4$）之间放置一个顶点v，使v与两个K_n中的每一个的任意两个不同的顶点相邻。

目录

- 通路与回路
- 无向图的连通性与连通度
- 有向图的连通性及其分类

有向图的连通性

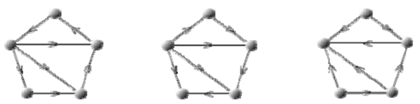
- 设D=<V,E>为有向图。$v_i,v_j \in V$，若从v_i到v_j存在通路，则称v_i可达v_j，规定v_i总是可达自身的。若v_i可达v_j且v_j可达v_i，则称v_i与v_j是相互可达的。
- 设D=<V,E>为有向图，$v_i,v_j \in V$，若v_i可达v_j，称v_i到v_j长度最短的通路为v_i到v_j的短程线，短程线的长度为v_i到v_j的距离，记作$d\langle v_i,v_j\rangle$。
- 与无向图中顶点v_i与v_j之间的距离$d(v_i,v_j)$相比，$d\langle v_i,v_j\rangle$除无对称性外，具有$d(v_i,v_j)$所具有的一切性质。

有向连通图的分类

- 设D=<V,E>为一个有向图。若D的基图是连通图，则称D是弱连通图，简称为连通图。
- 若$v_i,v_j \in V$，v_i可达v_j与v_j可达v_i至少成立其一，则称D是单向连通图。
- 若D中任意两顶点均是相互可达的，则称D是强连通图。

例题

- 在下面的图中，（1）为强连通图，（2）为单连通图，（3）是弱连通图。



(1) (2) (3)

- 由定义可知，强连通图一定是单向连通图，单向连通图一定是弱连通图。

强连通图与单向连通图的判别

- **定理1**：设有向图D=<V,E>，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$。D是强连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路。
- **定理2**：设D是n阶有向图，D是单向连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路。