



集合论与图论08

图的连通性

何英华

hyh@tju.edu.cn

目录

- 通路 & 回路
- 无向图的连通性与连通度
- 有向图的连通性及其分类

定义

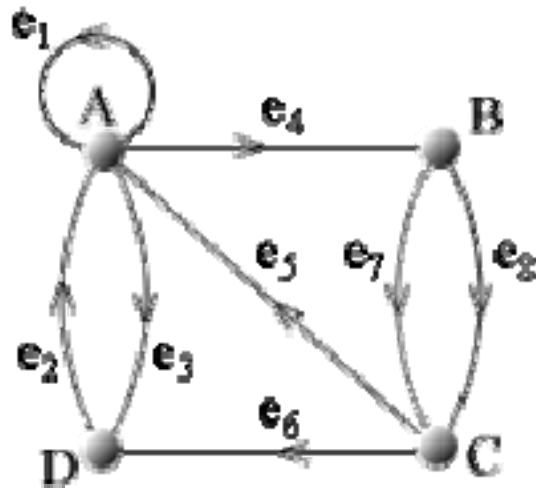
- 顶点与边的交替序列 $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_l v_l$ 称为 v_0 到 v_l 的**通路**，其中， v_{i-1} 和 v_i 为 e_i 的端点， $i=1,2,\dots,l$ ， v_0, v_l 分别称为 Γ 的始点与终点， Γ 中边的条数 l 称为它的长度。若 $v_0 = v_l$ ，则称通路为**回路**。
- 若 Γ 的所有边各异，则称 Γ 为**简单通路**，又若 $v_0 = v_l$ ，则称 Γ 为**简单回路**。

定义

- 若 Γ 的 v_0 与 v_l 以外所有顶点各异，所有边也各异，则称 Γ 为初级通路或路径，此时又若 $v_0=v_l$ ，则称 Γ 为初级回路或圈。将长度为奇数的圈称为奇圈，长度为偶数的圈称为偶圈。
- 若 Γ 中有边重复出现，则称 Γ 为复杂通路，又若 $v_0=v_l$ ，则称 Γ 为复杂回路。

例题

例：设有向图 $D=\langle V, E \rangle$ 如下图所示，在图中找出长度为4的简单回路和圈，并以子图形式画出它们。



解：长度为4的简单回路共16条，以子图形式画出时，它们是4个子图。长度为4的圈共8个，以子图形式画出时，它们是2个子图。

几点说明

- 回路是通路的特殊情况。
- 初级通路(回路)是简单通路(回路)，但反之不真。
- 通路(回路)的表示法
 - 用顶点与边的交替序列表示： $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_l v_l$
 - 用边的序列表示： $\Gamma = e_1 e_2 \dots e_l$
 - 在简单图中也可以用顶点序列表示： $\Gamma = v_0 v_1 \dots v_l$
- 在无向图中，长为1的圈包含环，长为2的圈包含平行边，因而在简单无向图中，圈的长度至少为3。在有向图中，长为1的圈包含环，因而在简单有向图中，圈的长度至少为2。

性质

- 定理：在 n 阶图 G 中，若从顶点 u 到 v （ $u \neq v$ ）存在通路，则从 u 到 v 存在长度小于或等于 $n-1$ 的初级通路。

性质

- 定理：在一个 n 阶图 G 中，若存在 v 到自身的回路，则一定存在 v 到自身长度小于或等于 n 的初级回路。

例题

(1) 无向完全图 K_n ($n \geq 3$) 中有几种非同构的圈?

(2) 顶点依次标定为 a, b, c 的无向完全图 K_3 中有多少个不同的圈?

解(1) $n-2$; (2) 6

目录

- 通路 & 回路
- 无向图的连通性与连通度
- 有向图的连通性及其分类

一、无向图的连通性

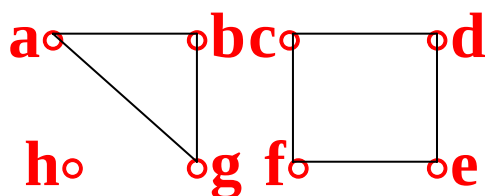
- 在无向图 G 中，若顶点 u 和 v 之间存在通路，则称 u 与 v 是连通的。对于 G 中的任一顶点，规定它与自身是连通的。
- 若无向图 G 是平凡图，或 G 中任何两个顶点都是连通的，则称 G 为连通图，否则称 G 是非连通图。
- 例：完全图 $K_n (n \geq 1)$ 都是连通图，而零图 $N_n (n \geq 2)$ 都是非连通图。

二、连通分支

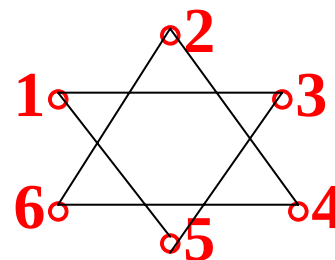
- 无向图中顶点之间的连通关系
 $R=\{(u,v) \mid u,v \in V \text{ 且 } u \text{ 与 } v \text{ 之间有通路}\}$
是一个等价关系。
- 设无向图 $G=\langle V,E \rangle$, V 关于顶点之间的连通关系 R 的商集 $V/R=\{V_1,V_2,\dots,V_k\}$, V_i 为等价类, 称导出子图 $G[V_i](i=1,2,\dots,k)$ 为 G 的连通分支, 连通分支数 k 记为 $p(G)$ 。
- 若 G 为连通图, 则 $p(G)=1$ 。若 G 为非连通图, 则 $p(G) \geq 2$ 。 n 阶零图是连通分支最多的, $p(N_n)=n$ 。

例题

- 求下面各图中 V 关于连通关系 R 的商集 V/R ，并计算连通分支的个数。



G_1



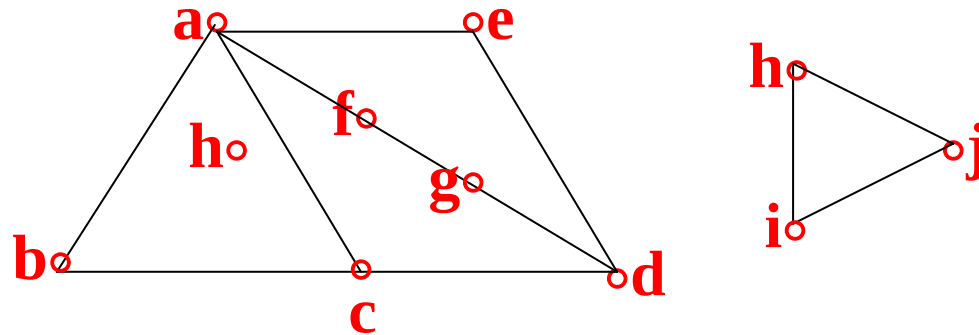
G_2

三、短程线，距离

- 设 u, v 为无向图 G 中任意两个顶点，若 u 与 v 是连通的，则称 u, v 之间长度最短的通路为 u, v 之间的短程线，短程线的长度称为 u, v 之间的距离，记作 $d(u, v)$ 。当 u, v 不连通时，规定 $d(u, v) = \infty$ 。
- 距离有以下性质：
 1. $d(u, v) \geq 0$ ， $u = v$ 时，等号成立。
 2. 具有对称性， $d(u, v) = d(v, u)$ 。
 3. 满足三角不等式： $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$
- 在完全图 $K_n (n \geq 2)$ 中，任何两个顶点之间的距离都是1。
在 n 阶零图 $N_n (n \geq 2)$ 中，任何两个顶点之间的距离都为 ∞ 。

例题

- 下图中a与d之间的短程线有2条， $d(a,d)=2$ ，a与g之间的短程线有1条， $d(a,g)=2$ ，易知 $d(a,b)=1$ ， $d(a,h)=\infty$ 。

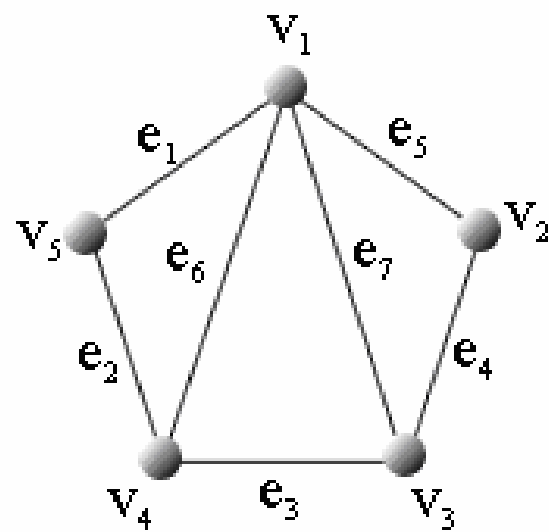


四、删除边(集)和顶点(集)

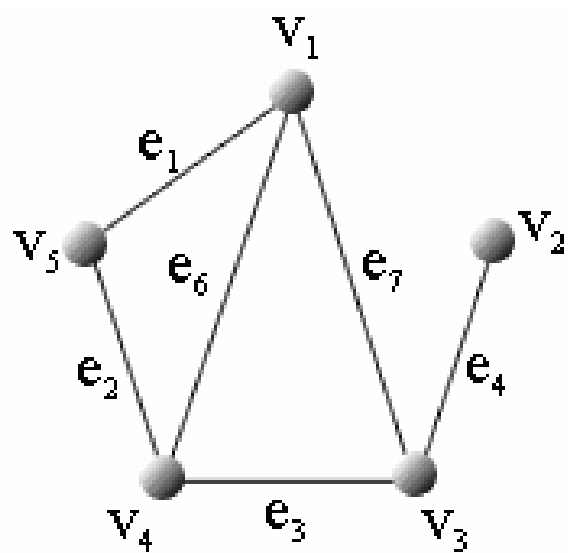
- 设 $G=\langle V, E \rangle$ 为无向图。设 $e \in E$ ，从 G 中去掉边 e ，称为删除边 e ，并用 $G-e$ 表示从 G 中删除 e 所得子图。又设 $E' \subseteq E$ ，从 G 中删除 E' 中所有的边，称为删除 E' ，并用 $G-E'$ 表示删除 E' 后所得子图。

四、删除边(集)和顶点(集)

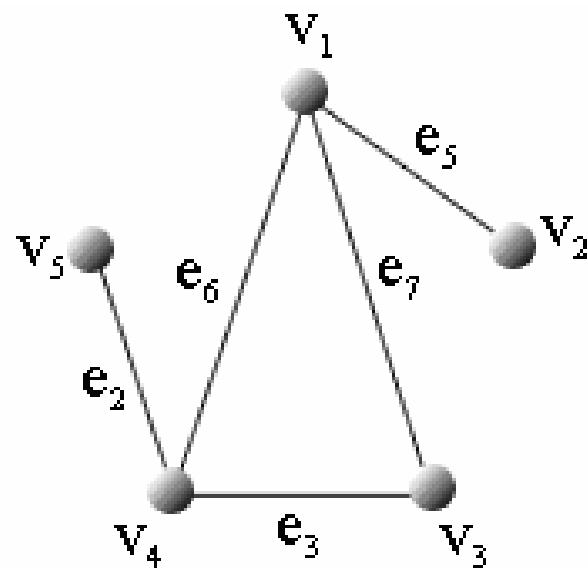
- 设 $G=\langle V, E \rangle$ 为无向图。设 $v \in V$ ，从 G 中去掉 v 及所关联地一切边称为删除顶点 v ，并用 $G-v$ 表示删除 v 后所得子图。又设 $V' \subseteq V$ ，称从 G 中删除 V' 中所有顶点为删除 V' ，并用 $G-V'$ 表示所得子图。

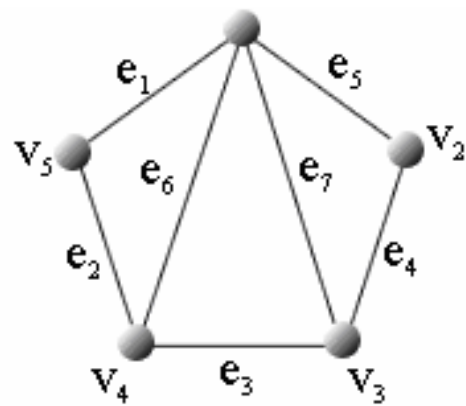


$G - e_5$

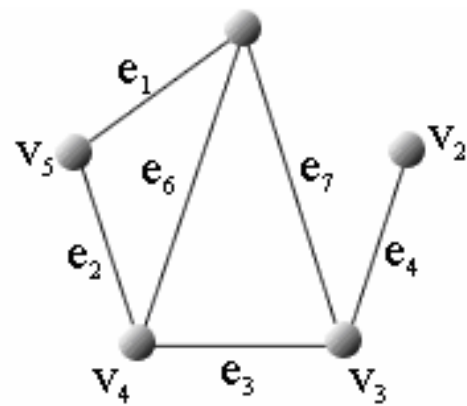


$G - \{e_1, e_4\}$

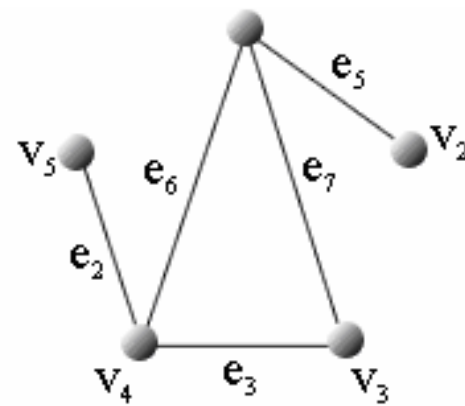




(1)

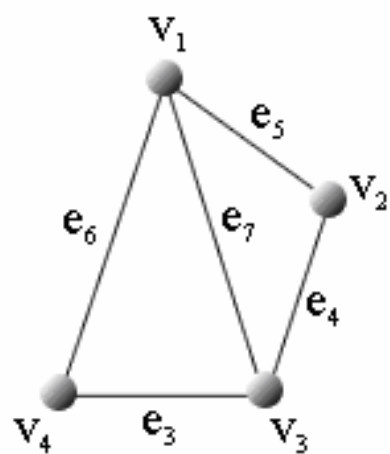


(2)



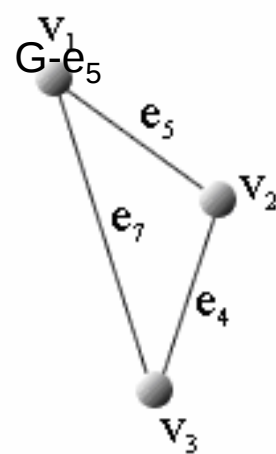
(3)

$G - \{e_1, e_4\}$



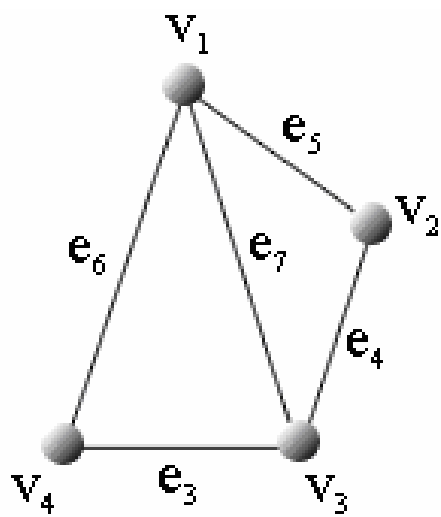
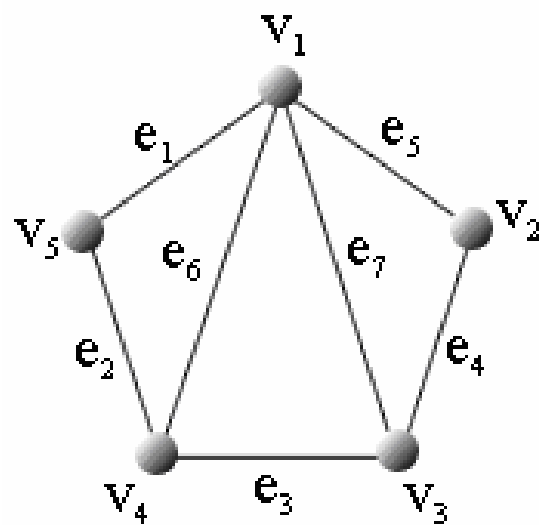
(4)

$G - v_5$

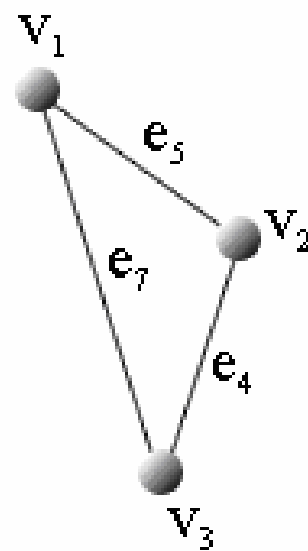


(5)

$G - \{v_4, v_5\}$



$G - v_5$



$G - \{v_4, v_5\}$

五、割集

- **点割集**: 无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $\emptyset \neq V' \subset V$, 满足
(1) $p(G - V') > p(G)$; (2) $\forall V'' \subset V'$, $p(G - V'') = p(G)$, 则称 V' 为点割集。
- **割点**: v 是割点 $\Leftrightarrow \{v\}$ 是点割集

五、割集

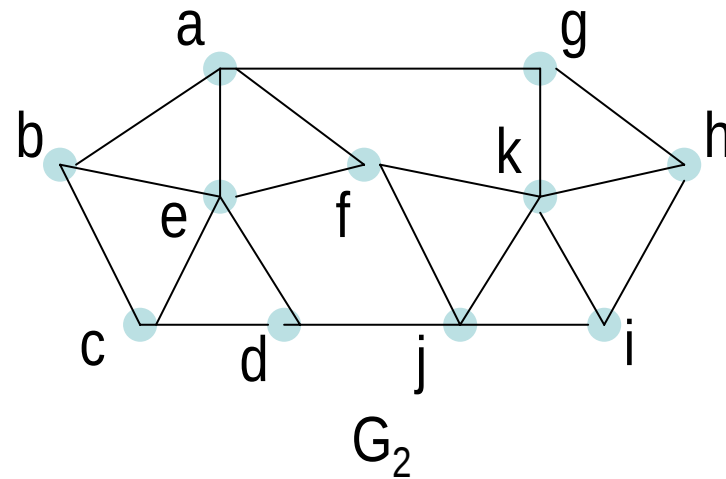
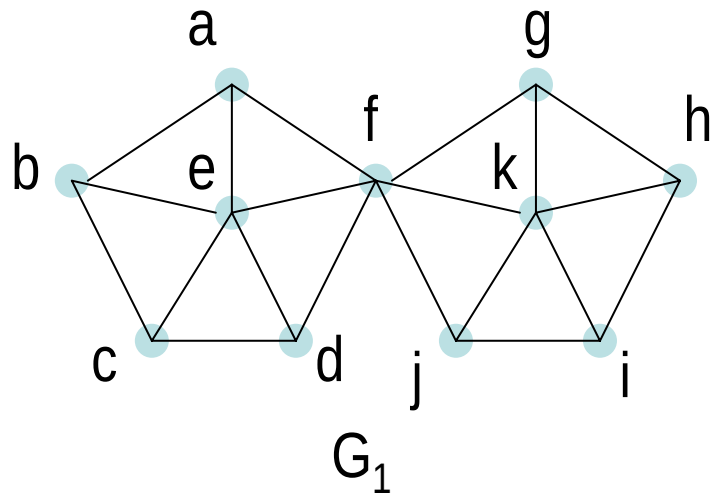
- **边割集**: 无向图 $G=\langle V, E \rangle$, $\emptyset \neq E' \subset E$, 满足
(1) $p(G-E') > p(G)$; (2) $\forall E'' \subset E'$, $p(G-E'') = p(G)$,
则称 E' 为边割集
- **割边 (桥)**: (u, v) 是割边 $\Leftrightarrow \{(u, v)\}$ 是边割集

- 令 $G = \langle V, E \rangle$ 是连通无向图, 结点集合 V_1 , $V_1 \subseteq V$, 如果删去 V_1 中所有结点后, G 就变得不连通了, 而删去 V_1 的任何真子集中的所有结点, 得到的子图仍然连通. 则称 V_1 是 G 的一个点割集.
- 如果点割集 V_1 中只有一个结点, 则称此结点为割点.

- 令 $G = \langle V, E \rangle$ 是连通无向图, 边的集合 $E_1, E_1 \subseteq E$, 如果删去 E_1 中所有边后, G 就变得不连通了, 而删去 E_1 的任何真子集中的所有边, 得到的子图仍然连通. 则称 E_1 是 G 的一个边割集.
- 如果边割集 E_1 中只有一条边, 则称此边为割边, 也称之为桥.

例题

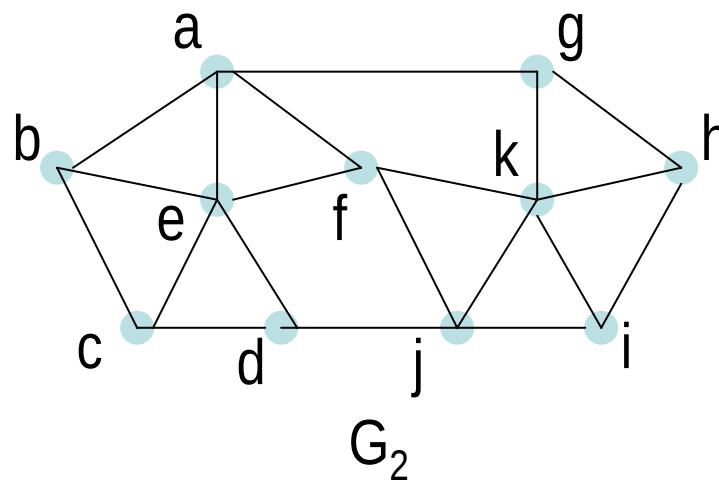
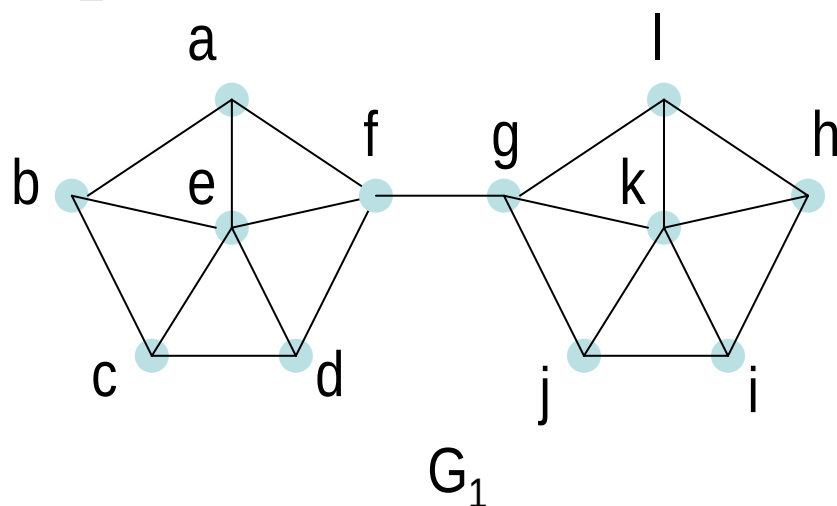
- $G_1: \{f\}, \{a,e,c\}, \{g,k,j\}, \text{---}\{b,e,f,k,h\}$
- $G_2: \text{---}\{f\}, \{a,e,c\}, \{g,k,j\}, \{b,e,f,k,h\}$



- G_1 中 f 是割点, G_2 中无割点

例题

- $G_1: \{(a,f), (e,f), (d,f)\}, \{(g,l), (g,k), (j,k), (j,i)\},$
 ~~$\{(a,f), (e,f), (d,f), (g,l), (g,k), (g,j)\}, \{(c,d)\}$~~
- $G_2: \{(b,a), (b,e), (b,c)\}$



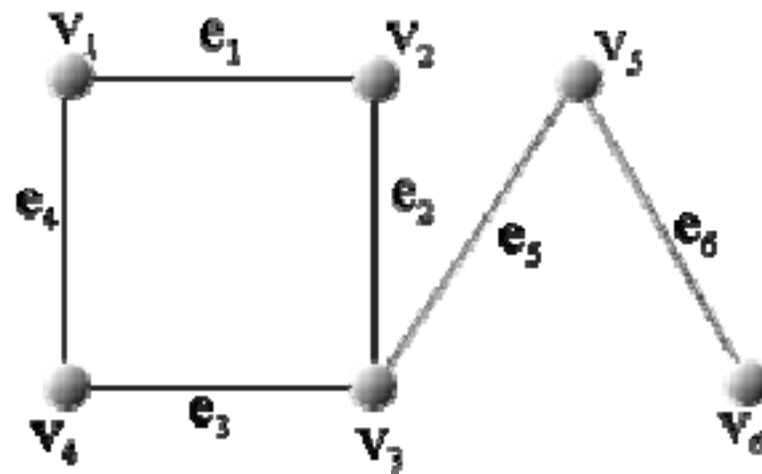
- G_1 中(f,g)是桥, G_2 中无桥

说明

- 1) 完全图无点割集
- 2) 零图既无点割集, 也无边割集
- 3) 若 G 是连通图, E' 是 G 的边割集, 则 $p(G-E')=2$
- 4) 若 G 是连通图, V' 是 G 的点割集, 则 $p(G-V')\geq 2$

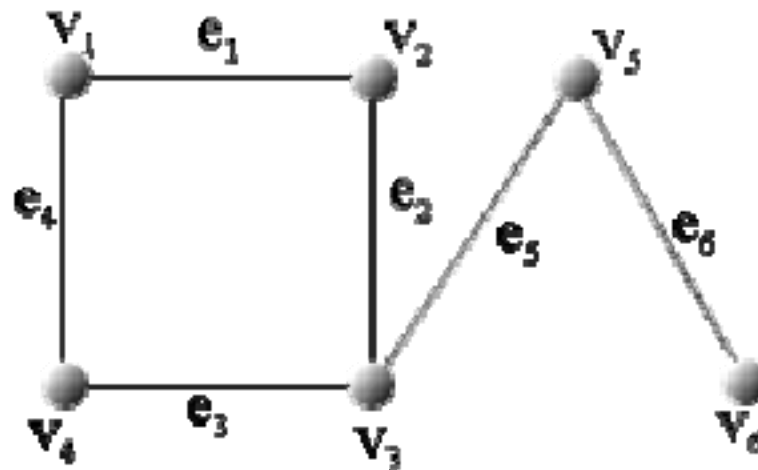
例题

- 哪些是点割集？哪些是割点？
- 哪些是边割集？哪些是桥？



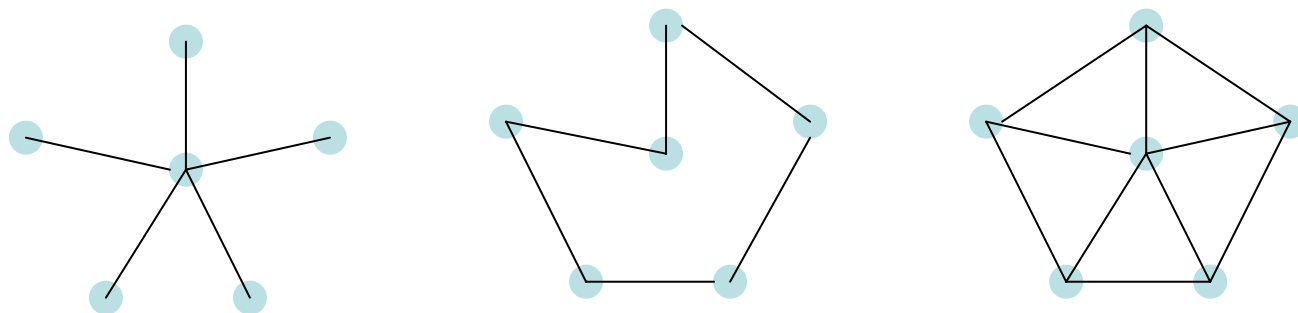
例题

- 点割集: $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3\}$, $\{v_5\}$
- 割点: v_3, v_5 。
- 注意, v_1 与悬挂顶点 v_6 不在任何割集中。 $\{e_6\}$, $\{e_5\}$, $\{e_2, e_3\}$, $\{e_1, e_2\}$, $\{e_3, e_4\}$, $\{e_1, e_4\}$, $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$ 都是割集, 其中 e_6, e_5 是桥。



六、连通度

- 问题: 如何定量比较无向图连通性的强与弱?

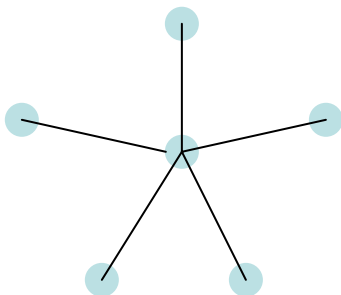


- **点连通度**: 为了破坏连通性,至少需要删除多少个顶点?
- **边连通度**: 为了破坏连通性,至少需要删除多少条边?

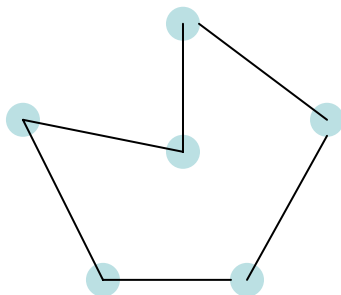
点连通度

平凡图、有割点的图的 κ

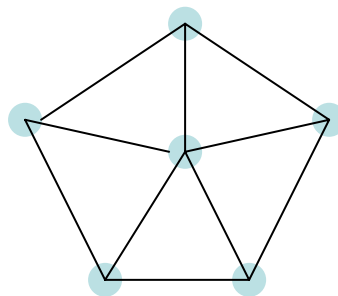
- **点连通度**：对于无向非连通图 G ， $\kappa(G)=0$ 。对于无向完全图， $\kappa(K_n) = n-1$ 。对于无向连通非完全图 G ， $\kappa(G) = \min\{ |V'| \mid V' \text{ 是 } G \text{ 的点割集} \}$
- 例： $\kappa(G)=1$, $\kappa(H)=2$, $\kappa(F)=3$, $\kappa(K_5)=4$



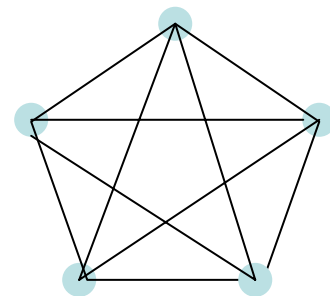
G



H



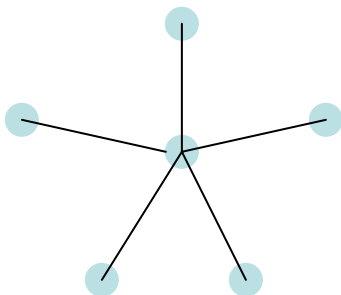
F



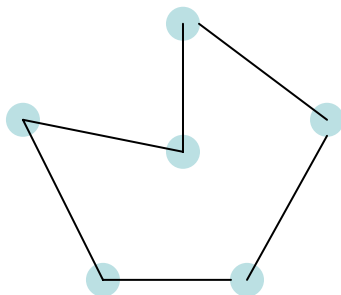
边连通度

平凡图、有割点的图的 λ

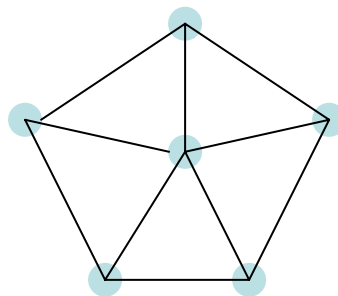
- **边连通度**：对于无向非连通图 G ， $\lambda(G)=0$ 。对于无向连通图 G ， $\lambda(G) = \min\{ |E'| \mid E' \text{ 是 } G \text{ 的边割集} \}$
- 例： $\lambda(G)=1$, $\lambda(H)=2$, $\lambda(F)=3$, $\lambda(K_5)=4$



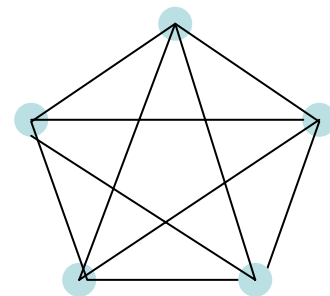
G



H



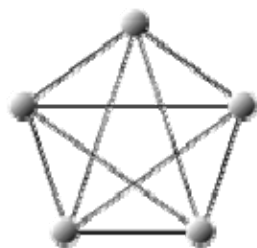
F



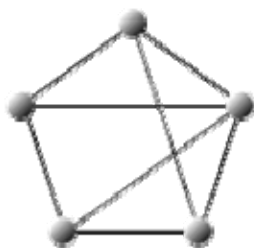
定理

- **定理：** 对于任何无向图 G ，有 $\kappa \leq \lambda \leq \delta$.
- **证明：** (只是一个思路)
 - 1) 证明 $\lambda \leq \delta$ 。考虑顶点 v ， $d(v) = \delta$ ，则可在 v 关联的边中构造出边割集 E' ，所以 $\lambda \leq |E'| \leq \delta$ 。
 - 2) 证明 $\kappa \leq \lambda$ 。设 E' 是边割集， $|E'| = \lambda$ ，则可从 E' 关联的顶点中构造出点割集 V' ，使得 $|V'| \leq \lambda$ ，所以 $\kappa \leq |V'| \leq \lambda$ 。

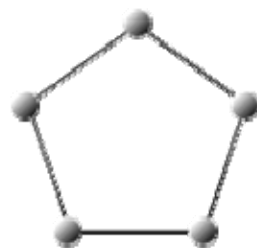
- 求下面各图的点连通度、边连通度，并将它们按点连通程度及边连通程度排序。



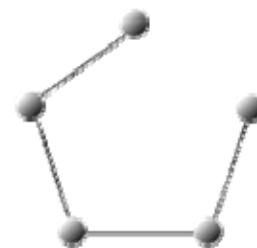
(1)



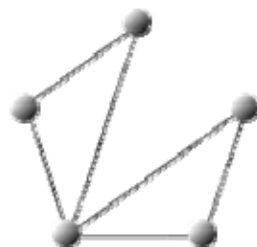
(2)



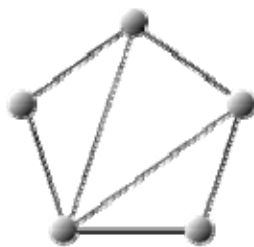
(3)



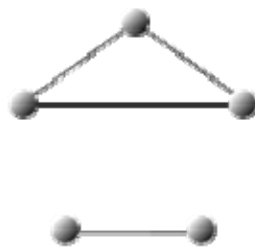
(4)



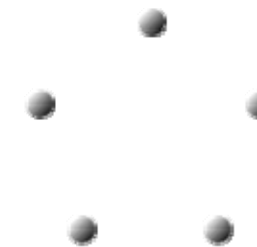
(5)



(6)



(7)



(8)

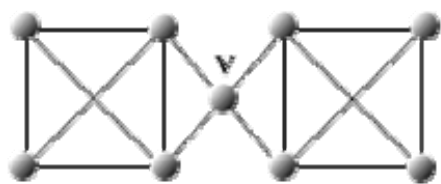
- $\kappa_1 = \lambda_1 = 4$, $\kappa_2 = \lambda_2 = 3$, $\kappa_3 = \lambda_3 = 2$, $\kappa_4 = \lambda_4 = 1$,
 $\kappa_5 = 1, \lambda_5 = 2$, $\kappa_6 = \lambda_6 = 2$, $\kappa_7 = \lambda_7 = 0$, $\kappa_8 = \lambda_8 = 0$

例题

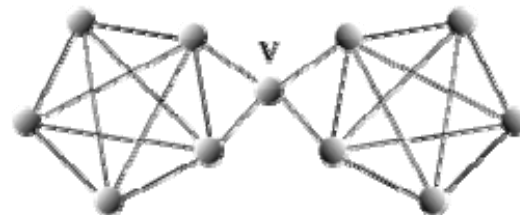
- 1) 给出一些无向简单图, 使得 $\kappa = \lambda = \delta$ 。
- 2) 给出一些无向简单图, 使得 $\kappa < \lambda < \delta$ 。

解:

- 1) n 阶无向完全图 K_n 和 n 阶零图 N_n 都满足要求。
- 2) 在两个 K_n ($n \geq 4$) 之间放置一个顶点 v , 使 v 与两个 K_n 中的每一个的任意两个不同的顶点相邻。



(1)



(2)

目录

- 通路 & 回路
- 无向图的连通性与连通度
- 有向图的连通性及其分类

有向图的连通性

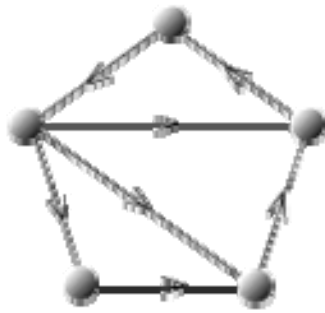
- 设 $D=<V,E>$ 为有向图。 $v_i, v_j \in V$ ，若从 v_i 到 v_j 存在通路，则称 v_i 可达 v_j ，规定 v_i 总是可达自身的。若 v_i 可达 v_j 且 v_j 可达 v_i ，则称 v_i 与 v_j 是相互可达的。
- 设 $D=<V,E>$ 为有向图， $v_i, v_j \in V$ ，若 v_i 可达 v_j ，称 v_i 到 v_j 长度最短的通路为 v_i 到 v_j 的短程线，短程线的长度为 v_i 到 v_j 的距离，记作 $d<v_i, v_j>$ 。
- 与无向图中顶点 v_i 与 v_j 之间的距离 $d(v_i, v_j)$ 相比， $d<v_i, v_j>$ 除无对称性外，具有 $d(v_i, v_j)$ 所具有的一切性质。

有向连通图的分类

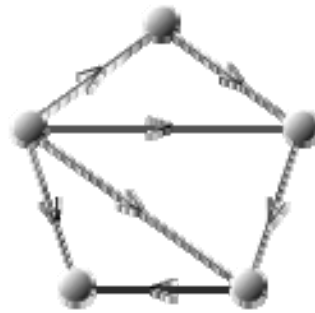
- 设 $D=\langle V,E \rangle$ 为一个有向图。若 D 的基图是连通图，则称 D 是弱连通图，简称为连通图。
- 若 $v_i, v_j \in V$ ， v_i 可达 v_j 与 v_j 可达 v_i 至少成立其一，则称 D 是单向连通图。
- 若 D 中任意两顶点均是相互可达的，则称 D 是强连通图。

例题

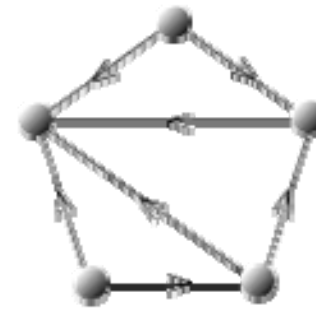
- 在下面的图中，（1）为强连通图，（2）为单连通图，（3）是弱连通图。



(1)



(2)



(3)

- 由定义可知，强连通图一定是单向连通图，单向连通图一定是弱连通图。

强连通图与单向连通图的判别

- **定理1:** 设有向图 $D=\langle V,E \rangle$, $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ 。D是强连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路。
- **定理2:** 设D是n阶有向图, D是单向连通图当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路。