集合论与图论07

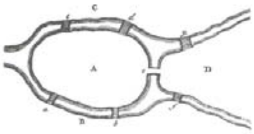
图的基本概念

何英华
hyh@tju.edu.cn

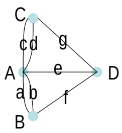
- 图论〔Graph Theory〕是数学的一个分支。它以图为研究对象。图论中的图是由若干给定的点及连接两点的线所构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系，用点代表事物，用连接两点的线表示相应两个事物间具有这种关系。

七桥问题

- 1736年，欧拉提出“七桥问题”，图论诞生

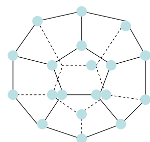


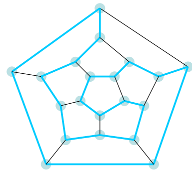
问题是要从这四块陆地中任何一块开始，通过每一座桥正好一次，再回到起点。



周游世界问题

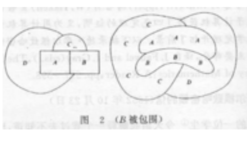
- 1859年，数学家哈密顿将正十二面体的每个顶点比作一个城市，连接两个顶点之间的边看作城市之间的交通线，提出周游世界问题：能否从某个城市出发沿交通线经过每个城市一次并且仅一次，最后回到出发点？





四色猜想

- 1852年，毕业于伦敦大学的弗南西斯·格思里(Francis Guthrie)来到一家科研单位搞地图着色工作时，发现了一种有趣的现象：“看来，每幅地图都可以用四种颜色着色，使得有共同边界的国家着上不同的颜色。” 即“将平面任意地细分为不相重迭的区域，每一个区域总可以用1，2，3，4这四个数字之一来标记，而不会使相邻的两个区域得到相同的数字。”



- 每个地图可以导出一个图，其中国家都是点，当相应的两个国家相邻时这两个点用一条线来连接。所以四色猜想是图论中的一个问题。

目录

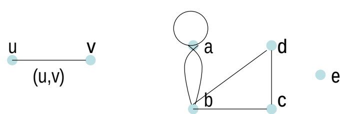
- 无向图与有向图
- 顶点度数与握手定理
- 简单图、完全图、正则图
- 子图、补图
- 图的同构

有序积、无序积、多重集

- 有序积: $A\times B=\{ \langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$
  有序对: $\langle x,y\rangle\neq\langle y,x\rangle$
- 无序积: $A\&B=\{ (x,y) \mid x\in A\wedge y\in B\}$
  无序对: $(x,y)=(y,x)$
- 多重集: $\{a,a,a,b,b,c\}\neq\{a,b,c\}$
  重复度: a的重复度为3, b的为2, c的为1

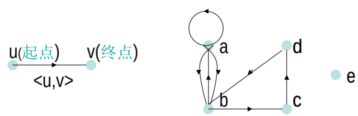
无向图

- 无向图$G=\langle V,E\rangle$： $\boxed{V(G)=V,\ E(G)=E}$
  (1) $V\neq\varnothing$, 顶点,结点； (2) 多重集$E\subseteq V\&V$, 边。
- 例: $G=\langle V,E\rangle, V=\{a,b,c,d,e\}$,
  $E=\{(a,a),(a,b),(a,b),(b,c),(c,d),(b,d)\}$.



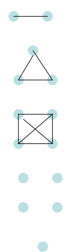
有向图

- 有向图$D=\langle V,E\rangle$： $\boxed{V(D)=V,\ E(D)=E}$
  (1) $V\neq\varnothing$, 顶点,结点； (2) 多重集$E\subseteq V\times V$, 边
- 例: $D=\langle V,E\rangle, V=\{a,b,c,d,e\}$,
  $E=\{ \langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle \}$.



n阶图,零图,平凡图,空图

- 有限图: 顶点集和边集都是有限集
- n阶图: $|V(G)|=n$
- 零图: $E=\varnothing$，n阶零图
- 平凡图: 1阶零图
- 空图: $V=E=\varnothing$



标定图,非标定图,基图

- 标定图: 顶点或边带标记
- 非标定图: 顶点或边不带标记
- 基图: 有向图去掉边的方向后得到的无向图

关联，相邻

- 关联: 点与边 v_i v_j e_k
  - 端点，
  - 孤立点：无边关联的顶点；
  - 环：若一条边所关联的两个顶点重合；
  - 边与顶点的关联次数：

    1：若$v_i \neq v_j$，则称e_k与v_i（或v_j）的关联次数为1；

    2：若$v_i = v_j$，则称e_k与v_i（或v_j）的关联次数为2；

    0：若v_l 不是e_k的端点，则称e_k与v_l 的关联次数为0；

关联，相邻

- 相邻:

  点与点：若存在一条边e以v_i，v_j为端点，即e=(v_i,v_j)，则称v_i与v_j彼此相邻，简称相邻的。

  边与边：若边e_k与e_l至少有一个公共端点，则称e_k与e_l是彼此相邻的，简称相邻的。

关联，相邻

- 有向图的关联与相邻
  - 始点：v_i是e_k的始点；
  - 终点： v_j是e_k的始点；
  - 邻接到：v_i邻接到v_j；
  - 邻接于：v_j邻接于v_i；

v_i v_j e_k

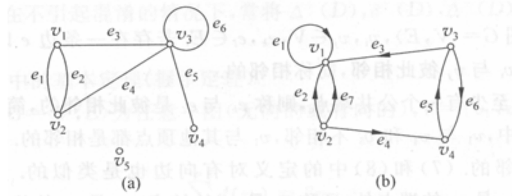


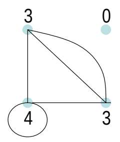
图 6.1

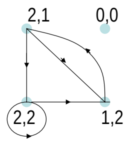
在图 6.1(a)中，v_1 与 v_4 和 v_5 不相邻，v_1 与其他顶点都是相邻的. e_5 与 e_1，e_2 不相邻，与其他边均是相邻的.（7）和（8）中的定义对有向边也是类似的. 只是这时，若 $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$，除称 v_i，v_j 是 e_k 的端点外，还称 v_i 是 e_k 的**始点**，v_j 是 e_k 的**终点**，v_i **邻接到** v_j，v_j **邻接于** v_i. 在图 6.1(b)中，$e_4 = \langle v_2, v_4 \rangle$，$v_2$ 是 e_4 的始点，v_4 是 e_4 的终点. v_2 邻接到 v_4，v_4 邻接于 v_2.

目录

顶点的度数

- 度$d_G(v)$: v作为边的端点的次数之和
- 出度$d_D^+(v)$: v作为边的起点的次数之和
- 入度$d_D^-(v)$: v作为边的终点的次数之和
- 度$d_D(v) = d_D^+(v) + d_D^-(v)$





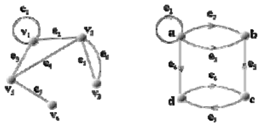
(d^+,d^-)

最大(出/入)度,最小(出/入)度

- 最大度: $\Delta(G) = \max\{ d_G(v) \mid v \in V(G) \}$
- 最小度: $\delta(G) = \min\{ d_G(v) \mid v \in V(G) \}$
- 最大出度: $\Delta^+(D) = \max\{ d_D^+(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最小出度: $\delta^+(D) = \min\{ d_D^+(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最大入度: $\Delta^-(D) = \max\{ d_D^-(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最小入度: $\delta^-(D) = \min\{ d_D^-(v) \mid v \in V(D) \}$
- 简记为 $\Delta, \delta, \Delta^+, \delta^+, \Delta^-, \delta^-$

悬挂顶点(边)、奇(偶)度顶点

- 称度数为1的顶点为悬挂顶点，与它关联的边为悬挂边。度为奇数(偶数)的顶点称为奇度(偶度)顶点。
- 在下图中，(1)的$d(v_1)=4$，$\triangle=4$，$\delta=1$，v_4是悬挂顶点，e_7是悬挂边。(2)的$d^+(a)=4$，$d^-(a)=1$，$d(a)=5$，$\triangle=5$，$\delta=3$，$\triangle^+=4$，$\delta^+=0$，$\triangle^-=3$，$\delta^-=1$。



(1) (2)

握手定理

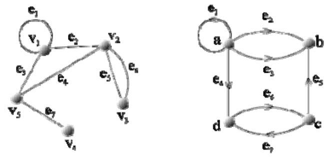
- 定理1:设$G=\langle V,E\rangle$是无向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则
  $d(v_1)+d(v_2)+\ldots+d(v_n)=2m$.
- 定理2:设$D=\langle V,E\rangle$是有向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则
  $d^+(v_1)+d^+(v_2)+\ldots+d^+(v_n)$
  $= d^-(v_1)+d^-(v_2)+\ldots+d^-(v_n) = m$.
- 推论:任何图中,奇数度顶点的个数是偶数。

度数列

- 设$G=\langle V,E\rangle$为一个n阶无向,$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,称$d(v_1),d(v_2),\ldots,d(v_n)$为G的度数列，对于顶点标定的无向图，它的度数列是唯一的。
- 设$D=\langle V,E\rangle$为一个n阶有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，称$d(v_1),d(v_2),\ldots,d(v_n)$为D的度数列，另外称$d^+(v_1),d^+(v_2),\ldots,d^+(v_n)$与$d^-(v_1),d^-(v_2),\ldots,d^-(v_n)$分别为D的出度列和入度列。

例题1

- 在下图中， (1)按顶点的标定顺序，度数列为4,4,2,1,3。在(2)中，按字母顺序，度数列，出度列，入度列分别为5,3,3,3；4,0,2,1；1,3,1,2.



(1) (2)

例题2

1）以下两组数能够称无向图的度序列吗？为什么？
① 2,3,4,5,6,7 ② 1,2,2,3,4

2）已知图中有11条边，有1个4度顶点，4个3度顶点，其余顶点的度数均小于等于2，问G中至少有几个顶点？

3）已知5阶有向图D的顶点集$V=\{v_1,v_2, v_3,v_4,v_5\}$,它的度数列和出度列分别为3,3,2,3,3和1,2,1,2,1，试求D的入度列。

例题

- 例3：设n阶m条边的无向图G中，m=n+1，证明G中存在顶点v，d(v) ≥3。

例题

- 例4：证明空间不存在有奇数个面且每个面有奇数条棱的多面体。

例题

- 例5：设G为9阶无向图，G的每个顶点的度数不是5就是6。证明G中至少有5个6度顶点或者至少6个5度顶点。

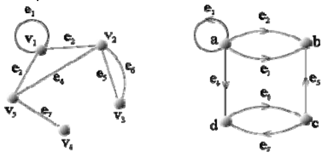
目录

多重图与简单图

- 在无向图中，关联一对顶点的无向边如果多于1条，则称这些边为平行边，平行边的条数称为重数。
- 在有向图中，关联一对顶点的有向边如果多于1条，并且这些边的始点和终点相同(也就是它们的方向相同)，则称这些边为平行边。
- 含平行边的图称为多重图，既不含平行边也不含环的图称为简单图。

例题

- 下图(1)中e_5与e_6是平行边，(2)中e_2与e_3是平行边，e_6与e_7不是平行边。两个图都不是简单图。

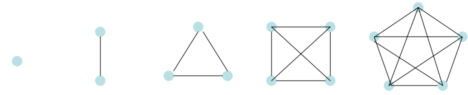


(1) (2)

- n阶简单无向图满足0≤Δ≤n-1。

完全图

- n阶无向完全图记做K_n(n≥1) 中每个顶点均与其余的n-1个顶点相邻。

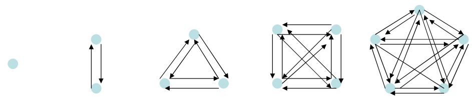


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

- K_n的边数为n(n-1)/2。

有向完全图

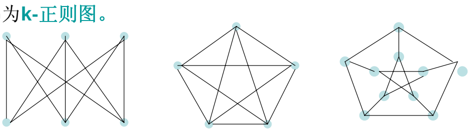
- n阶有向完全图D中每个顶点都邻接到其余的n-1个顶点，并邻接于其余的n-1个顶点。



- n阶有向完全图的边数为n(n-1)。

正则图

定义 设G=<V,E>是无向简单图。若顶点的度数均为k，则称G为**k-**正则图。



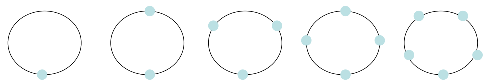
库拉图斯基图$K_{3,3}$ 库拉图斯基图K_5 彼得松图

- n阶零图是0-正则图，n阶无向完全图是(n-1)-正则图。n阶k-正则图的边数m=kn/2，因而当k为奇数时，n必为偶数。

圈

定义 6.7 (1) 设$G=\langle V,E\rangle$为$n(n\geqslant 3)$阶无向简单图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),\cdots,(v_{n-1},v_n),(v_n,v_1)\}$，则称$G$为$n$**阶圈图**，记作$C_n$.

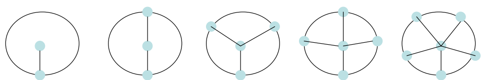
(2) 设$D=\langle V,E\rangle$为$n(n\geqslant 2)$阶有向简单图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{\langle v_1,v_2\rangle,\langle v_2,v_3\rangle,\cdots,\langle v_{n-1},v_n\rangle,\langle v_n,v_1\rangle\}$，则称$D$为$n$阶圈图，也可记为$C_n$.



C_1 C_2 C_3 C_4 C_5

轮

定义 6.8 在无向圈$C_{n-1}(n\geqslant 4)$内放置一个顶点，使该顶点与C_{n-1}上的每个顶点均相邻，所得简单图称为n**阶轮图**，记为W_n.



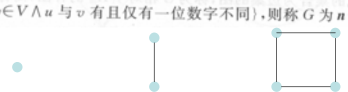
W_1 W_2 W_3 W_4 W_5

超立方体

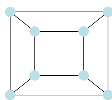
定义 6.9 设$G=\langle V,E\rangle$为$2^n(n\geqslant 1)$阶无向简单图，

$$V=\{v\mid v=a_1a_2\cdots a_n, a_i=0 \text{ 或 } 1, i=1,2,\cdots,n\},$$

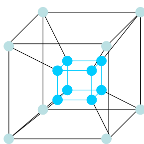
$E=\{(u,v)\mid u,v\in V\wedge u$与$v$有且仅有一位数字不同$\}$，则称$G$为$n$**方体图**，记为$Q_n$.



Q_0 Q_1 Q_2



Q_3



Q_4

目录

- 无向图与有向图
- 顶点度数与握手定理
- 简单图、完全图、正则图
- 子图、补图
- 图的同构

子图

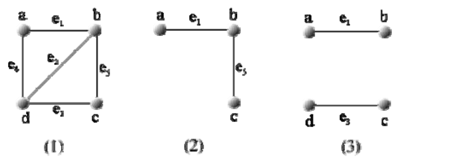
- 设G=<V,E>，G‘=<V’,E‘>为两个图(同为无向图或同为有向图)，若V’⊆V且E‘⊆E，则称G’是G的子图，G为G‘的母图，记作G’⊆G。若G’⊆G且G’≠G(即V‘⊂V或E’⊂E)，则称G‘为G的真子图。若G’⊆G并且V’=V，则称G‘为G的生成子图。

导出子图

- 设V_1⊆V且V_1≠ф，以两个端点均在V_1中的全体边为边集E_1的G的子图称为V_1导出的导出子图，记作G[V_1]. 设E_1⊆E且E_1≠ф，以E_1中的边关联的顶点的全体为顶点集V_1的G的子图称为E_1导出的导出子图，记作G[E_1]。

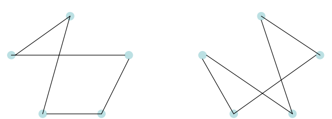
例题

- 在下图中，设G为(1)中图所表示，取V_1={a,b,c}，则V_1的导出子图G[V_1]为(2)中图所示。取E_1={e_1，e_3}，则E_1的导出子图G[E_1]为(3)中图所示。



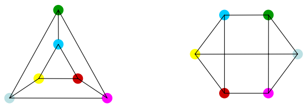
补图

- 设G=<V，E>，以V为顶点集，以所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的补图，记做$\bar{G}$



目录

- 无向图与有向图
- 顶点度数与握手定理
- 简单图、完全图、正则图
- 子图、补图
- 图的同构



图同构

- 图同构: 设无向(有向)图$G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$, 若存在双射 $f:V_1\to V_2$, 满足$\forall u\in V_1,\forall v\in V_1$,

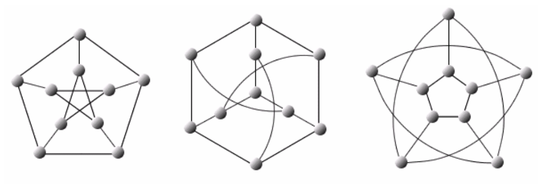
$$(u,v)\in E_1 \leftrightarrow (f(u),f(v))\in E_2$$

$$(\ <u,v>\in E_1 \leftrightarrow <f(u),f(v)>\in E_2\ )$$

则称G_1与G_2同构, 记作$G_1\cong G_2$

图之间的同构关系

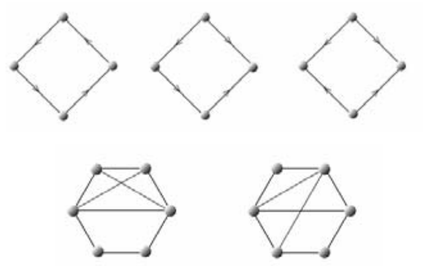
- 图之间的同构关系是等价关系。这个等价关系的每一个等价类中的图，在同构的意义之下都可以看成一个图，这样就可以说，在图同构的意义下，图的数学定义与图形表示是一一对应的。



判断两个图是否同构

- 到目前为止，人们还没有找到判断两个图是否同构的好的算法，还只能根据定义看是否能找到满足条件的双射函数。
- 两个图同构的必要条件：若$G_1\cong G_2$，则它们的阶数相同，边数相同，度数列相同。
- 不要将两个图同构的必要条件当成充分条件。破坏这些必要条件的任何一个，两个图就不会同构，但以上列出的条件都满足，两个图也不一定同构。

例题



例题

例　画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图。

例题

例 画出3阶2条边的所有非同构的有向简单图。

例 画出以1，1，1，2，2，3为度数列的3个非同构的无向简单图。