集合论与图论07

图的基本概念

何英华

hyh@tju.edu.cn

目录

- 无向图与有向图
- 顶点度数与握手定理
- 简单图、完全图、正则图
- 子图、补图
- 图的同构

有序积、无序积、多重集

- 有序积: $A\times B=\{ <x,y> \mid x\in A\wedge y\in B\}$
  有序对: $<x,y>\neq<y,x>$

- 无序积: $A\&B=\{ (x,y) \mid x\in A\wedge y\in B\}$
  无序对: $(x,y)=(y,x)$

- 多重集: $\{a,a,a,b,b,c\}\neq\{a,b,c\}$
  重复度: a的重复度为3, b的为2, c的为1

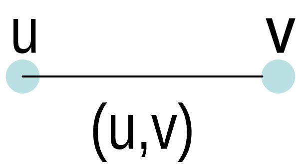
无向图

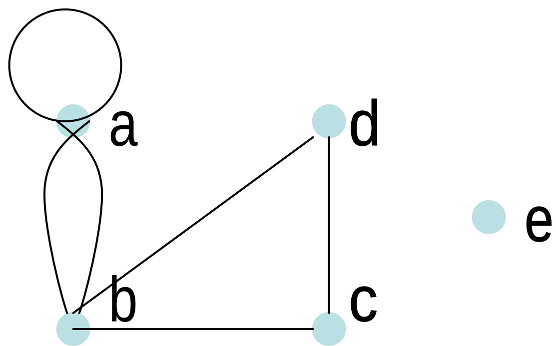
- 无向图G=<V,E>：　　　　$\boxed{V(G)=V,\ E(G)=E}$

  (1) V≠∅, 顶点,结点；　　(2) 多重集E⊆V&V, 边。

- 例: G=<V,E>,V={a,b,c,d,e},

  E={(a,a),(a,b),(a,b),(b,c),(c,d),(b,d)}.



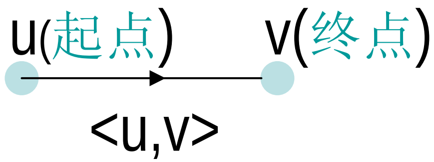


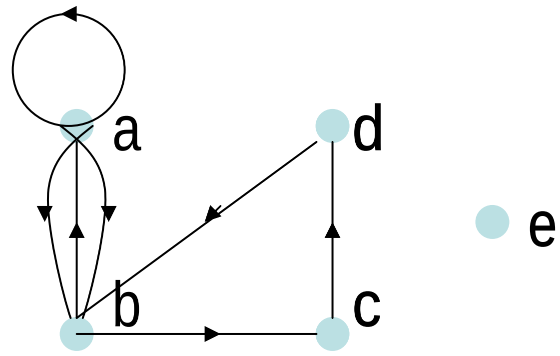
有向图

- 有向图D=<V,E>：　　V(D)=V, E(D)=E

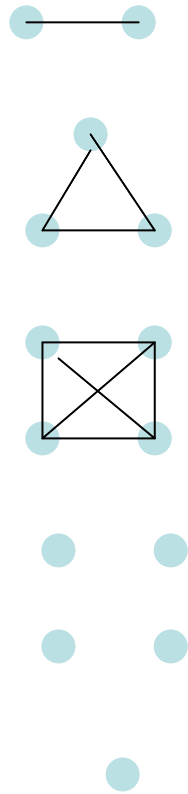
  (1) V≠∅, 顶点,结点；　　(2) 多重集E⊆V×V, 边

- 例: D=<V,E>,V={a,b,c,d,e},
  E={ <a,a>,<a,b>,<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,(d,b) }.





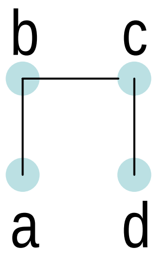
n阶图,零图,平凡图,空图

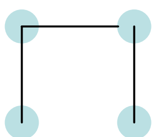


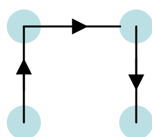
- 有限图: 顶点集和边集都是有限集
- n阶图: $|V(G)|=n$
- 零图: $E=\varnothing$，n阶零图
- 平凡图: 1阶零图
- 空图: $V=E=\varnothing$

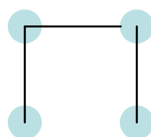
标定图,非标定图,基图

- 标定图: 顶点或边带标记
- 非标定图: 顶点或边不带标记
- 基图: 有向图去掉边的方向后得到的无向图



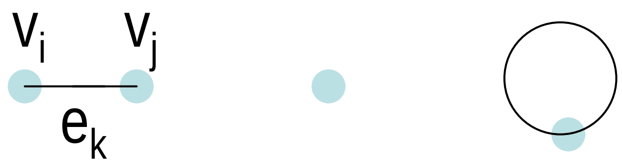






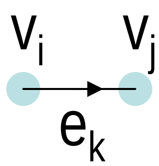
关联，相邻

- 关联: 点与边
  - 端点，孤立点
  - 环
  - 边与顶点的关联次数：1，2，0



- 相邻: 点与点,边与边

- 有向图的关联与相邻
  - 始点，终点
  - 邻接到,邻接于

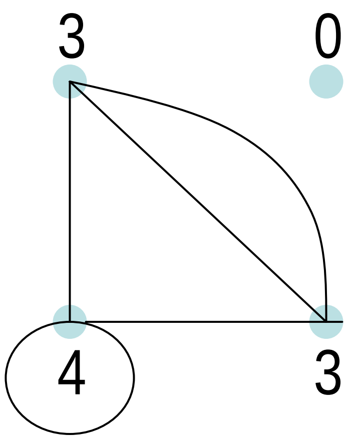


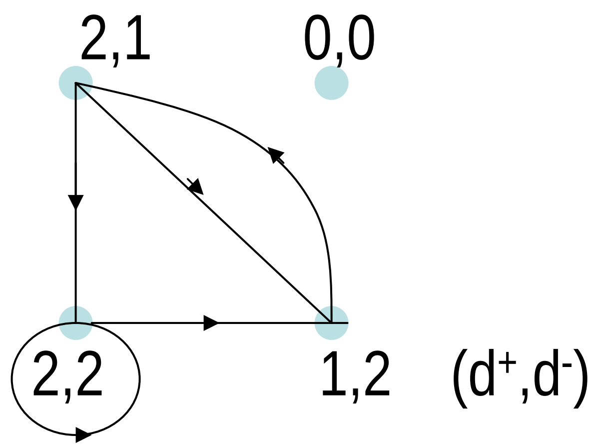
目录

- 无向图与有向图
- 顶点度数与握手定理
- 简单图、完全图、正则图
- 子图、补图
- 图的同构

顶点的度数

- 度$d_G(v)$: v作为边的端点的次数之和
- 出度$d_D^+(v)$: v作为边的起点的次数之和
- 入度$d_D^-(v)$: v作为边的终点的次数之和
- 度$d_D(v) = d_D^+(v) + d_D^-(v)$





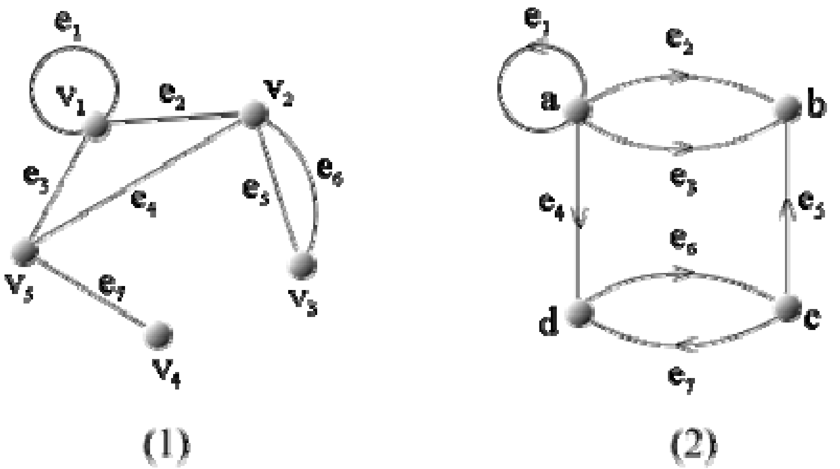
最大(出/入)度,最小(出/入)度

- 最大度: $\Delta(G) = \max\{ d_G(v) \mid v \in V(G) \}$
- 最小度: $\delta(G) = \min\{ d_G(v) \mid v \in V(G) \}$
- 最大出度: $\Delta^+(D) = \max\{ d_D^+(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最小出度: $\delta^+(D) = \min\{ d_D^+(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最大入度: $\Delta^-(D) = \max\{ d_D^-(v) \mid v \in V(D) \}$
- 最小入度: $\delta^-(D) = \min\{ d_D^-(v) \mid v \in V(D) \}$
- 简记为 $\Delta, \delta, \Delta^+, \delta^+, \Delta^-, \delta^-$

悬挂顶点(边)、奇(偶)度顶点

- 称度数为1的顶点为悬挂顶点，与它关联的边为悬挂边。度为奇数(偶数)的顶点称为奇度(偶度)顶点。

- 在下图中，(1)的$d(v_1)=4$，$\triangle = 4$，$\delta = 1$，v_4是悬挂顶点，e_7是悬挂边。(2)的$d^+(a)=4$，$d^-(a)=1$，$d(a)=5$，$\triangle=5$，$\delta=3$，$\triangle^+=4$，$\delta^+=0$，$\triangle^-=3$，$\delta^-=1$。



握手定理

- 定理1:设G=<V,E>是无向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

  $$d(v_1)+d(v_2)+\ldots+d(v_n)=2m.$$

- 定理2:设D=<V,E>是有向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

  $$d^+(v_1)+d^+(v_2)+\ldots+d^+(v_n)$$
  $$= d^-(v_1)+d^-(v_2) +\ldots+d^-(v_n) = m.$$

- 推论:任何图中,奇数度顶点的个数是偶数。

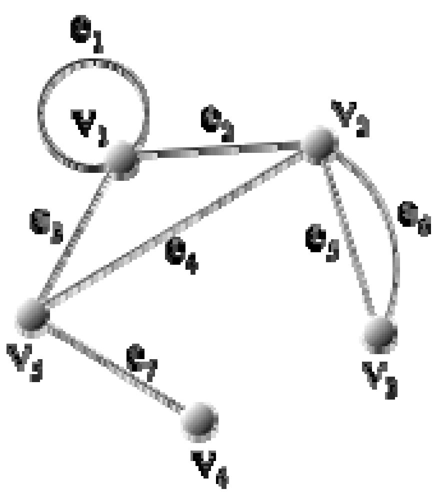
度数列

- 设G=<V,E>为一个n阶无向,$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,称$d(v_1),d(v_2),\ldots,d(v_n)$为G的度数列，对于顶点标定的无向图，它的度数列是唯一的。

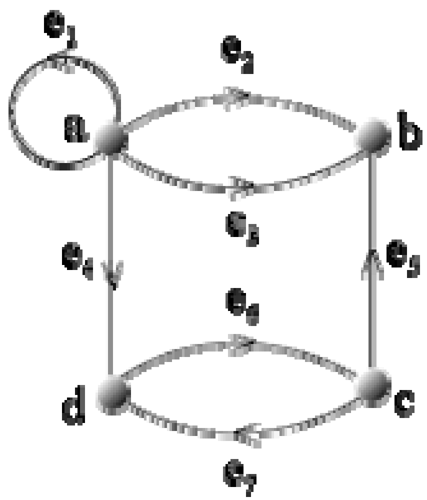
- 设D=<V,E>为一个n阶有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，称$d(v_1),d(v_2),\ldots,d(v_n)$为D的度数列，另外称$d^+(v_1),d^+(v_2),\ldots,d^+(v_n)$与$d^-(v_1),d^-(v_2),\ldots,d^-(v_n)$分别为D的出度列和入度列。

例题1

- 在下图中， (1)按顶点的标定顺序，度数列为4,4,2,1,3。在(2)中，按字母顺序，度数列，出度列，入度列分别为5,3,3,3；4,0,2,1；1,3,1,2.



(1)



(2)

例题2

1）以下两组数能够称无向图的度序列吗？为什么？

① 2,3,4,5,6,7　② 1,2,2,3,4

2）已知图中有11条边，有1个4度顶点，4个3度顶点，其余顶点的度数均小于等于2，问G中至少有几个顶点？

3）已知5阶有向图D的顶点集V={v_1,v_2, v_3,v_4,v_5},它的度数列和出度列分别为3,3,2,3,3和1,2,1,2,1，试求D的入度列。

例题

- 例3：设n阶m条边的无向图G中，m=n+1，证明G中存在顶点v，d(v) ≥3。

- 例4：证明空间不存在有奇数个面且每个面有奇数条棱的多面体。

- 例5：设G为9阶无向图，G的每个顶点的度数不是5就是6。证明G中至少有5个6度顶点或者至少6个5度顶点。

目录

- 无向图与有向图
- 顶点度数与握手定理
- 简单图、完全图、正则图
- 子图、补图
- 图的同构

多重图与简单图

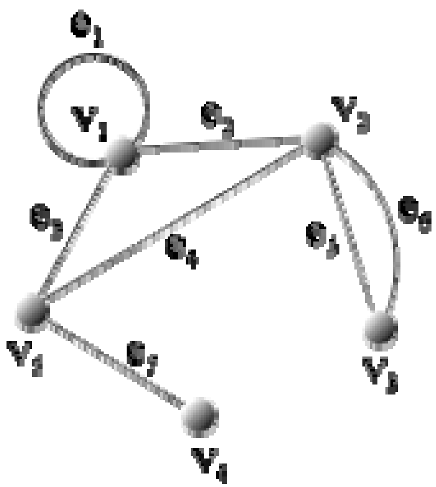
- 在无向图中，关联一对顶点的无向边如果多于1条，则称这些边为平行边，平行边的条数称为重数。

- 在有向图中，关联一对顶点的有向边如果多于1条，并且这些边的始点和终点相同(也就是它们的方向相同)，则称这些边为平行边。

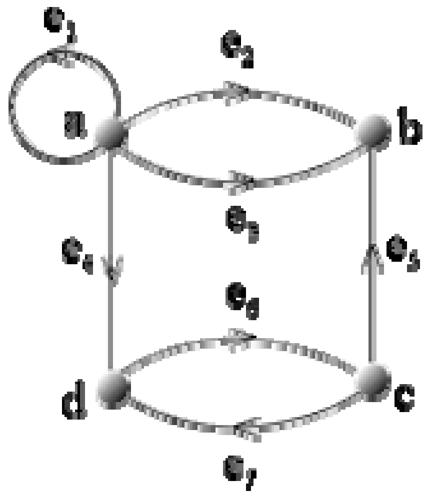
- 含平行边的图称为多重图，既不含平行边也不含环的图称为简单图。

例题

- 下图(1)中e_5与e_6是平行边， (2)中e_2与e_3是平行边，e_6与e_7不是平行边。两个图都不是简单图。



(1)

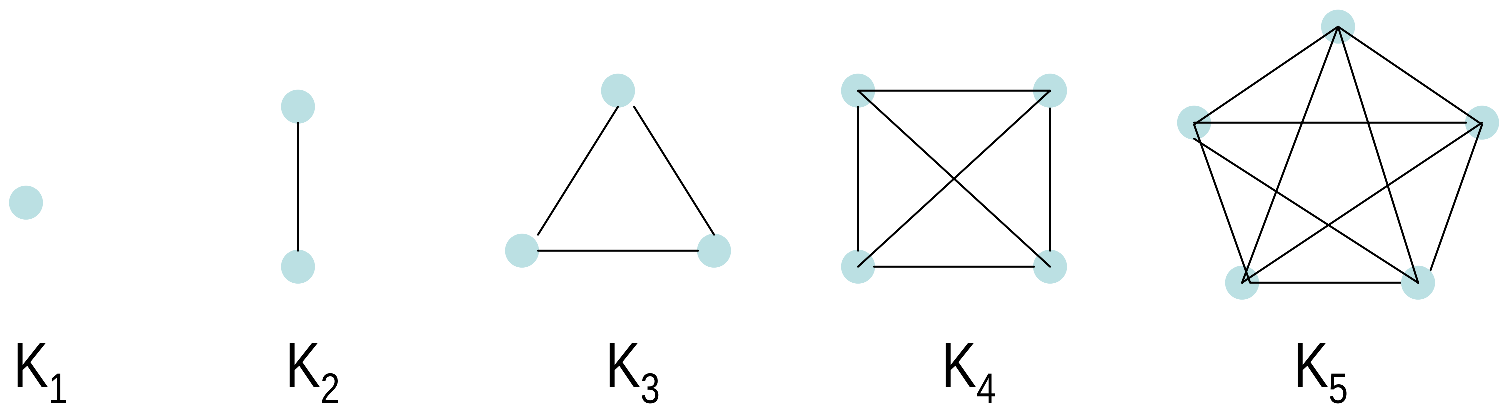


(2)

- n阶简单无向图满足0≤Δ≤n-1。

完全图

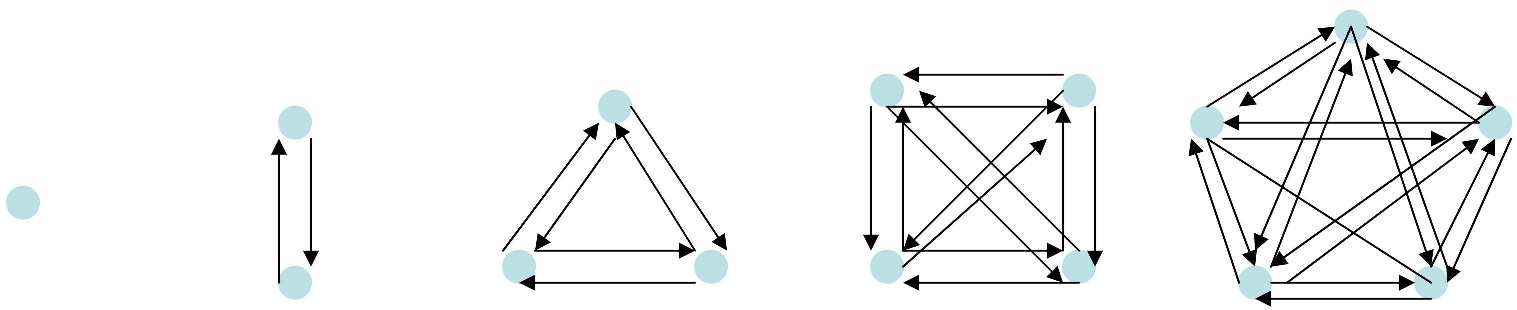
- **n阶无向完全图**记做$\mathbf{K_n}$(n≥1) 中每个顶点均与其余的n-1个顶点相邻。



- K_n的边数为n(n-1)/2。

有向完全图

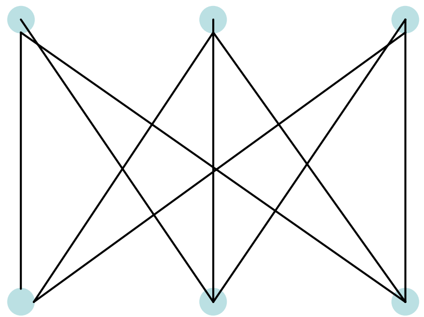
- n阶有向完全图D中每个顶点都邻接到其余的n-1个顶点，并邻接于其余的n-1个顶点。



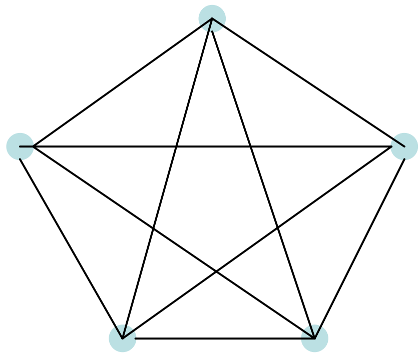
- n阶有向完全图的边数为n(n-1)。

正则图

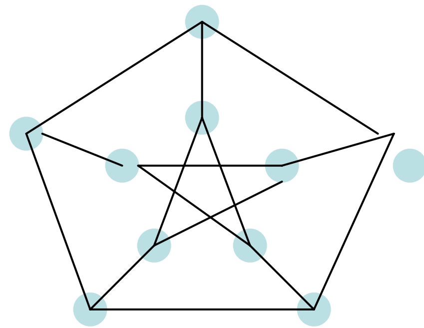
- **k-正则图**中，顶点的度数均为k。



库拉图斯基图$K_{3,3}$



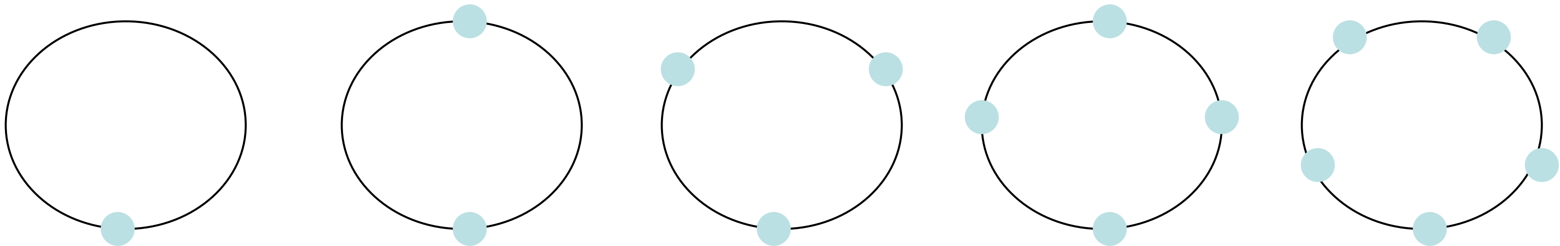
库拉图斯基图K_5



彼得松图

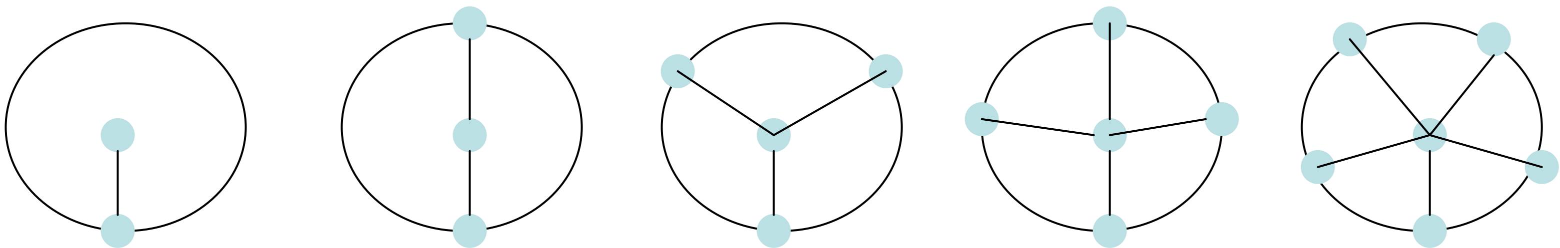
- n阶零图是0-正则图，n阶无向完全图是(n-1)-正则图。n阶k-正则图的边数m=kn/2，因而当k为奇数时，n必为偶数。

圈



C_1 C_2 C_3 C_4 C_5

轮

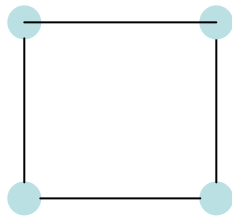


W_1 W_2 W_3 W_4 W_5

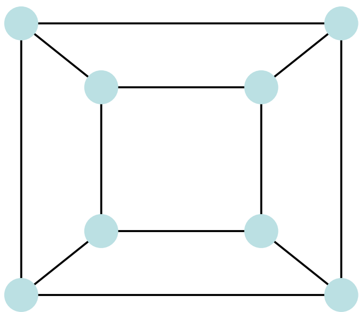
超立方体

Q_0

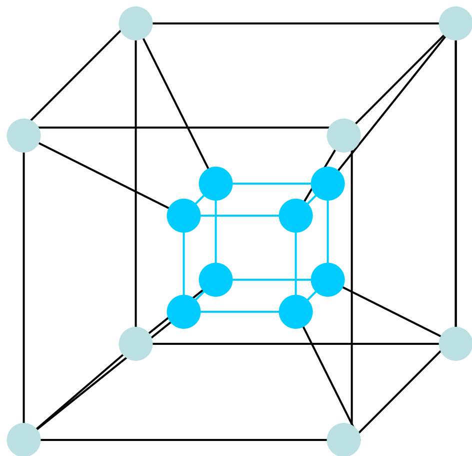
Q_1



Q_2



Q_3



Q_4

目录

- 无向图与有向图
- 顶点度数与握手定理
- 简单图、完全图、正则图
- 子图、补图
- 图的同构

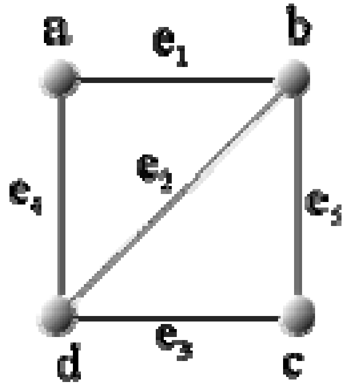
子图

- 设G=<V,E>，G‘=<V’,E‘>为两个图(同为无向图或同为有向图)，若V’⊆V且E‘⊆E，则称G’是G的子图，G为G‘的母图，记作G’⊆G。若G’⊆G且G’≠G(即V‘⊂V或E’⊂E)，则称G‘为G的真子图。若G’⊆G并且V’=V，则称G‘为G的生成子图。

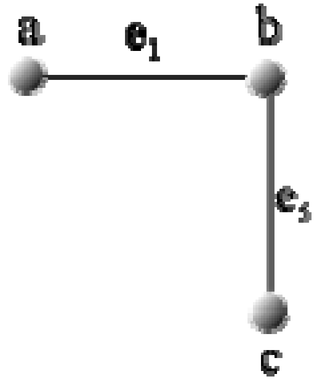
- 设V_1⊆V且V_1≠φ，以两个端点均在V_1中的全体边为边集E_1的G的子图称为V_1导出的导出子图，记作G[V_1]. 设E_1⊆E且E_1≠φ，以E_1中的边关联的顶点的全体为顶点集V_1的图G的子图称为E_1导出的导出子图，记作G[E_1]。

例题

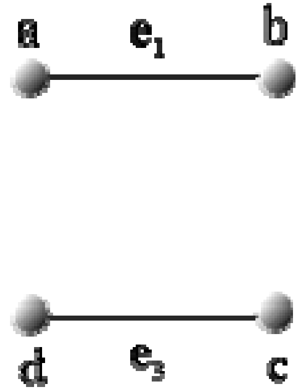
- 在下图中，设G为(1)中图所表示，取V_1={a,b,c}，则V_1的导出子图G[V_1]为(2)中图所示。取E_1={e_1，e_3}，则E_1的导出子图G[E_1]为(3)中图所示。



(1)



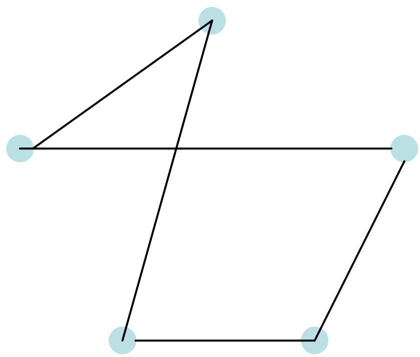
(2)

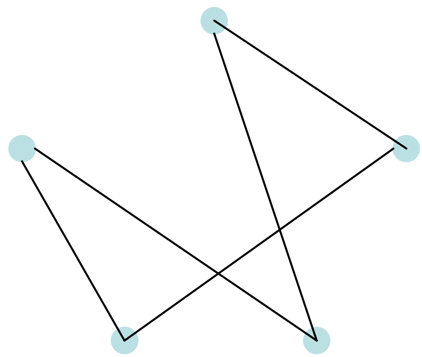


(3)

补图

- 设G=<V，E>，以V为顶点集，以所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的补图，记做$\overline{G}$





目录

- 无向图与有向图
- 顶点度数与握手定理
- 简单图、完全图、正则图
- 子图、补图
- 图的同构

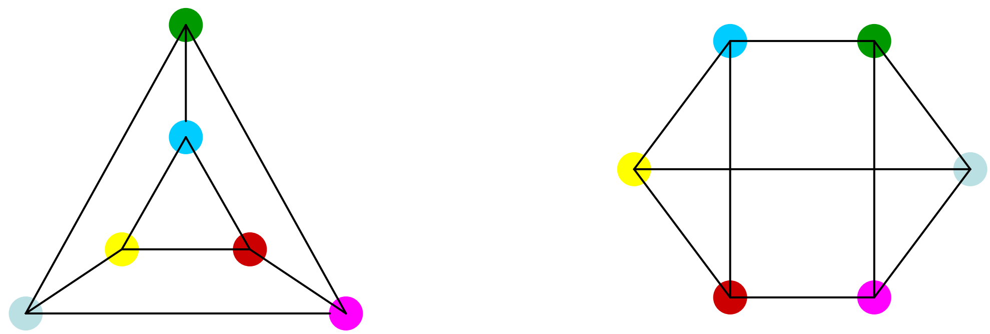
图同构

- 图同构: 设无向(有向)图$G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$, 若存在双射 $f:V_1 \to V_2$, 满足$\forall u \in V_1, \forall v \in V_1$,

$$(u,v) \in E_1 \leftrightarrow (f(u),f(v)) \in E_2$$

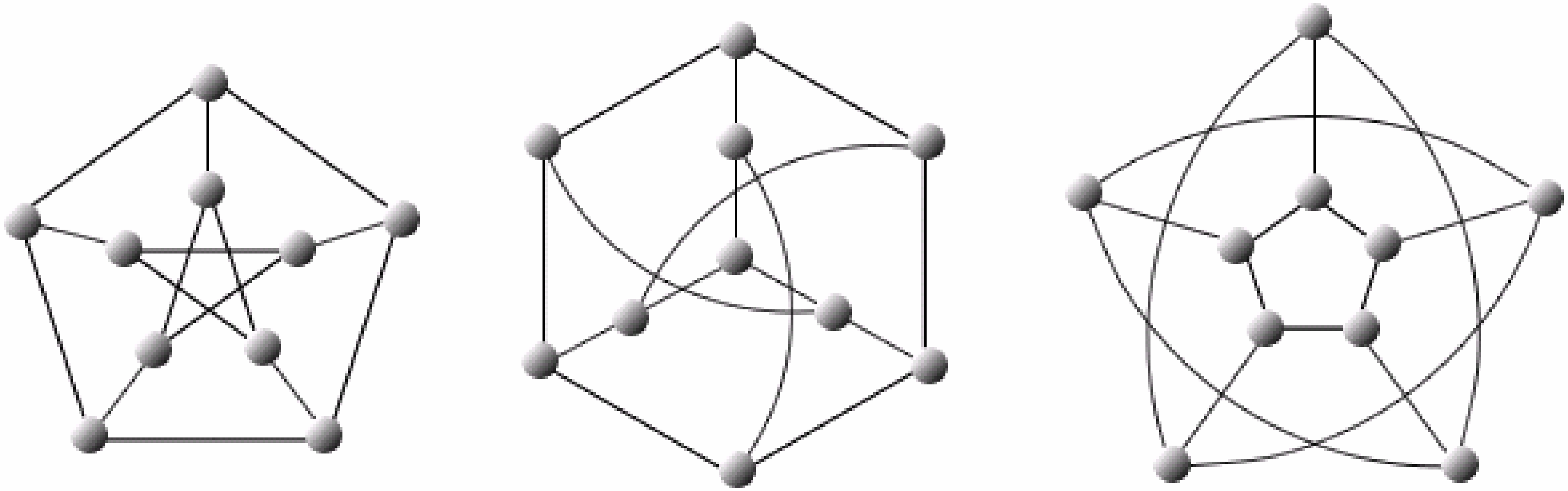
$$(<u,v> \in E_1 \leftrightarrow <f(u),f(v)> \in E_2)$$

则称G_1与G_2同构, 记作$G_1 \cong G_2$



图之间的同构关系

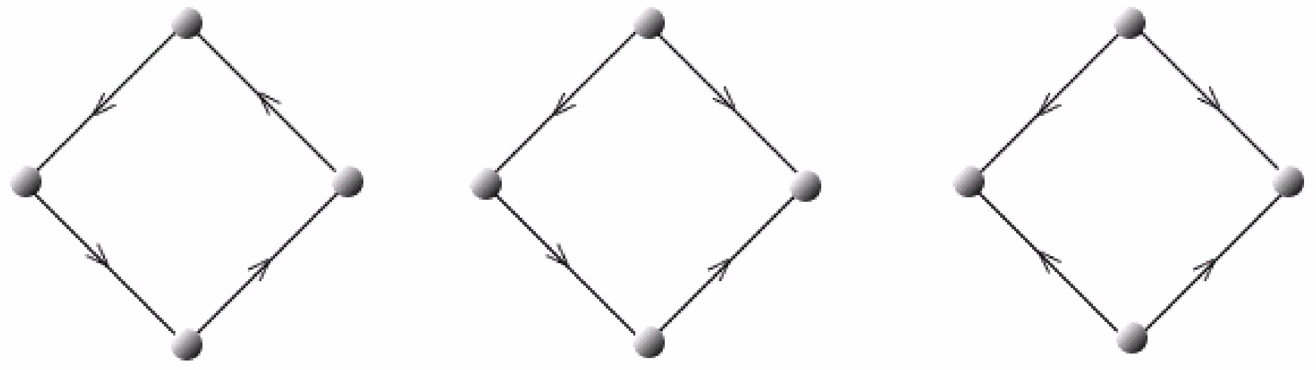
- 图之间的同构关系是等价关系。这个等价关系的每一个等价类中的图，在同构的意义之下都可以看成一个图，这样就可以说，在图同构的意义下，图的数学定义与图形表示是一一对应的。

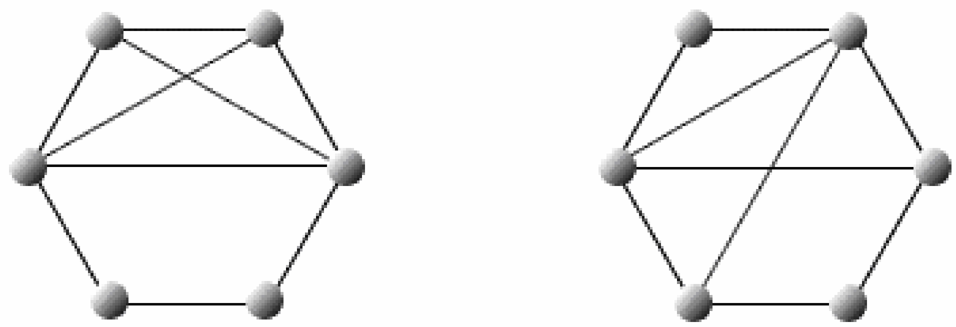


判断两个图是否同构

- 到目前为止，人们还没有找到判断两个图是否同构的好的算法，还只能根据定义看是否能找到满足条件的双射函数。
- 两个图同构的必要条件：若$G_1 \cong G_2$，则它们的阶数相同，边数相同，度数列相同。
- 不要将两个图同构的必要条件当成充分条件。破坏这些必要条件的任何一个，两个图就不会同构，但以上列出的条件都满足，两个图也不一定同构。

例题





例题

1. 画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图。

2. 画出3阶2条边的所有非同构的有向简单图。

3. 画出以1,1,1,2,2,3为度数列的3个非同构的无向简单图。