集合论与图论06

函数的复合与反函数

何英华

hyh@tju.edu.cn

函数的复合（1）

- **定理1**：设f，g是函数，则$f \circ g$也是函数，且满足
  1）$dom(f \circ g)=\{x|x \in dom f \wedge f(x) \in dom g\}$
  2）$x \in dom(f \circ g)$有$f \circ g(x)=g(f(x))$
- **推论1**：设f，g，h为函数，则$(f \circ g) \circ h$和$f \circ (g \circ h)$都是函数，且$(f \circ g) \circ h=f \circ (g \circ h)$
- **推论2** 设f：A→B，g：B→C，则$f \circ g$：A→C，且$x \in A$都有$f \circ g(x)=g(f(x))$

函数的复合（2）

- **定理2** 设f：A→B，g：B→C。
  1）如果f：A→B，g：B→C都是满射的，则f◦g：A→C也是满射的。
  2）如果f：A→B，g：B→C都是单射的，则f◦g：A→C也是单射的。
  3）如果f：A→B，g：B→C都是双射的，则f◦g：A→C也是双射的。

函数的复合（2）

- 定理的逆命题不为真。例如，考虑集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$，$C=\{c_1,c_2,c_3\}$。令
  $f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_3>\}$
  $g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_1,c_3>,<b_4,c_3>\}$
  则有 $f \circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_3>\}$
  不难看出f：A→B和f◦g：A→C都是单射的，但g：B→C不是单射的。

- 例如，考虑集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3\}$，$C=\{c_1,c_2\}$。令
  $f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_2>\}$
  $g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_3,c_2>\}$
  则有 $f \circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_2>\}$
  不难看出g：B→C和f◦g：A→C都是满射的，但f：A→B不是满射的。

函数的复合（3）

- **定理3** 设f：A→B，则有$f=f \circ I_B=I_A \circ f$
- 推论：设f：A→A，则有$f=f \circ I_A=I_A \circ f$

反函数（1）

- 任给函数F，它的逆F^{-1}不一定是函数，只是一个二元关系。 例如

  $F=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_1>\}$

  则有

  $F^{-1}=\{<y_1,x_1>,<y_1,x_2>\}$

  显然，F^{-1}不是函数。因为对于$y_1 \in domF^{-1}$有x_1和x_2两个值与之对应，破坏了函数的单值性。

反函数（1）

- 任给单射函数f：A→B，则f^{-1}是函数，且是从ranf到A的双射函数，但不一定是从B到A的双射函数。因为对于某些y∈B－ranf，f^{-1}没有值与之对应。

反函数（2）

- **定理4** 设f：A→B是双射的，则f^{-1}：B→A也是双射的。
- 对于双射函数f：A→B，称f^{-1}：B→A是它的**反函数**。

反函数（2）

- **例**：设f：R→R，g：R→R

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x)=x+2$$

求f◦g，g◦f。如果f和g存在反函数，求它们的反函数。

反函数（3）

- **定理5** 设f：A→B是双射的，则

  $f^{-1} \circ f=I_B$，$f \circ f^{-1}=I_A$

作业

- 5.4
- 5.17
- 5.21
- 5.24