



集合论与图论06

函数的复合与反函数

何英华

hyh@tju.edu.cn

函数的复合 (1)

- **定理1:** 设 f, g 是函数, 则 $f \circ g$ 也是函数, 且满足
 - 1) $\text{dom}(f \circ g) = \{x \mid x \in \text{dom} f \wedge f(x) \in \text{dom} g\}$
 - 2) $x \in \text{dom}(f \circ g)$ 有 $f \circ g(x) = g(f(x))$
- **推论1:** 设 f, g, h 为函数, 则 $(f \circ g) \circ h$ 和 $f \circ (g \circ h)$ 都是函数, 且 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- **推论2** 设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$, 且 $x \in A$ 都有 $f \circ g(x) = g(f(x))$

函数的复合 (2)

- **定理2** 设 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.
 - 1) 如果 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ 都是满射的, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$ 也是满射的。
 - 2) 如果 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ 都是单射的, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$ 也是单射的。
 - 3) 如果 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ 都是双射的, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$ 也是双射的。

函数的复合 (2)

- 定理的逆命题不为真。例如，考虑集合 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $C=\{c_1, c_2, c_3\}$ 。令

$$f=\{<a_1, b_1>, <a_2, b_2>, <a_3, b_3>\}$$

$$g=\{<b_1, c_1>, <b_2, c_2>, <b_1, c_3>, <b_4, c_3>\}$$

则有 $f \circ g = \{<a_1, c_1>, <a_2, c_2>, <a_3, c_3>\}$

不难看出 $f: A \rightarrow B$ 和 $f \circ g: A \rightarrow C$ 都是单射的，但 $g: B \rightarrow C$ 不是单射的。

- 例如，考虑集合 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$,

$B=\{b_1, b_2, b_3\}$, $C=\{c_1, c_2\}$ 。 令

$$f=\{<a_1, b_1>, <a_2, b_2>, <a_3, b_2>\}$$

$$g=\{<b_1, c_1>, <b_2, c_2>, <b_3, c_2>\}$$

则有 $f \circ g=\{<a_1, c_1>, <a_2, c_2>, <a_3, c_2>\}$

不难看出 $g: B \rightarrow C$ 和 $f \circ g: A \rightarrow C$ 都是满射的，但 $f: A \rightarrow B$ 不是满射的。

函数的复合 (3)

- 定理3 设 $f: A \rightarrow B$, 则有 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$
- 推论: 设 $f: A \rightarrow A$, 则有 $f = f \circ I_A = I_A \circ f$

反函数（1）

- 任给函数 F ，它的逆 F^{-1} 不一定是函数，只是一个二元关系。 例如

$$F=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_1>\}$$

则有

$$F^{-1}=\{<y_1,x_1>,<y_1,x_2>\}$$

显然， F^{-1} 不是函数。因为对于 $y_1 \in \text{dom} F^{-1}$ 有 x_1 和 x_2 两个值与之对应，破坏了函数的单值性。

反函数 (1)

- 任给单射函数 $f: A \rightarrow B$, 则 f^{-1} 是函数, 且是从 $\text{ran} f$ 到 A 的双射函数, 但不一定是从 B 到 A 的双射函数。因为对于某些 $y \in B - \text{ran} f$, f^{-1} 没有值与之对应。

反函数 (2)

- 定理4 设 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 则 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 也是双射的。
- 对于双射函数 $f: A \rightarrow B$, 称 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是它的反函数。

反函数 (2)

- 例：设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = x + 2$$

求 $f \circ g$, $g \circ f$ 。如果 f 和 g 存在反函数，求它们的反函数。

反函数 (3)

- **定理5** 设 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 则
$$f^{-1} \circ f = I_B, \quad f \circ f^{-1} = I_A$$

作业

- 5.4
- 5.17
- 5.21
- 5.24