集合论与图论05

函数的定义与性质

何英华

hyh@tju.edu.cn

函数的起源

- 在数的运算中，某些量之间存在着一种规律：一个或几个量的变化，会引起另一个量的变化，这种从运算中反映出来的量与量之间的相互依赖关系，就是函数概念的萌芽。

- 生活中：　人 —— 身高
  　　　　　人 —— 年龄
  　　　　学生 —— 班级

目录

– 函数的定义

– 从A到B的函数

– 常用的函数

一、函数的定义

- **定义：**设F为二元关系，若$\forall x \in domF$都存在唯一的$y \in ranF$使xFy成立，则称F为**函数**(或者**映射**)。

- 对于函数F，如果有xFy，则记作$y=F(x)$，并称y为F在x的值。

一、函数的定义

- **例1：** 设

$$F_1=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_2>,<x_3,y_2>\}$$

是

$$F_2=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_2>\}$$

不是

判断它们是否为函数。

函数的相等

- 设F，G为函数，则

  $$F=G \Leftrightarrow F\subseteq G \wedge G\subseteq F$$

- 由以上定义可知，如果两个函数F和G相等，一定满足下面两个条件：

  1．domF=domG

  2．$x\in$ domF=domG都有F(x)=G(x)

- 判断函数$F(x)=(x^2-1)/(x+1)$，$G(x)=x-1$是否相等？

不相等

因为 $\mathrm{dom}F=\{x|x\in R\wedge x\neq -1\}$

而 $\mathrm{dom}G=R$。

$\mathrm{dom}F\neq \mathrm{dom}G$。

– 函数的定义

– 从A到B的函数

– 常用的函数

二、从A到B的函数

- 定义：设A,B为集合，如果f为函数，且domf=A，ranf⊆B，则称f为**从A到B的函数**，记作

$$f：A\rightarrow B$$

例如

f：N→N，

f(x)=2x是从N到N的函数？

正确

g：N→N，

g(x)=2是从N到N的函数？

正确

- **定义:** 所有从A到B的函数的集合记作B^A，读作"**B上A**"。

  符号化表示为$B^A=\{ f \mid f\text{：} A \rightarrow B\}$

- 若$|A|=m$，$|B|=n$，且 $m,n>0$,

  则$|B^A|$ =

  n^m

例题

- **例2：** 设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b\}$，求B^A。

解： $B^A=\{f_0,f_1,\ldots,f_7\}$，其中

$$
\begin{aligned}
f_0&=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}\\
f_1&=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}\\
f_2&=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}\\
f_3&=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}\\
f_4&=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}\\
f_5&=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}\\
f_6&=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}\\
f_7&=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}
\end{aligned}
$$

– 函数的定义
– 从A到B的函数
– 常用的函数

三、常用的函数

(1) 设f：$A \to B$，如果存在$y \in B$使得对所有的$x \in A$都有$f(x)=y$，则称

$$f：A \to B$$

是常函数。

(2) A上的恒等关系I_A是不是一个函数？

为A上的恒等函数，对所有的$x \in A$都有$I_A(x)=x$。

设$<A,\preccurlyeq>$，$<B,\preccurlyeq>$为偏序集，f：$A \to B$，

(1) 如果对任意的x_1，$x_2 \in A$，$x_1 \preccurlyeq x_2$，就有$f(x_1) \preccurlyeq f(x_2)$，则称f为单调递增的；

(2) 如果对任意的x_1，$x_2 \in A$，$x_1 \prec x_2$，就有$f(x_1) \prec f(x_2)$，则称f为严格单调递增的。

(3) 类似的也可以定义单调递减和严格单调递减的函数。

1. 设A为集合， 对于$\forall A' \subseteq A$，A'的特征函数

$$x_{A'}: A \to \{0,1\}$$

定义为

$$x_{A'}(a)=1，a \in A'$$

并且 $$x_{A'}(a)=0，a \in A-A'。$$

2. 设R是A上的等价关系，令

$$g: A \to A/R，g(a)=[a]，\forall a \in A$$

称g是从A到商集A/R的自然映射。

例题

1. 函数f：R→R，f(x)=x+1，

是单调递增的吗？

是

是严格单调递增的吗？

是

例题

2. 给定偏序集$<P(\{a, b\}),R_{\subseteq}>$，$<\{0, 1\},\leqslant>$，

其中

（1）$R_{\subseteq}$为集合的包含关系，

（2）$\leqslant$为一般的小于等于关系。

令 f：$P(\{a,b\})\rightarrow\{0,1\}$，

$f(\varnothing)=f(\{a\})= f(\{b\})=0$，

$f(\{a,b\})=1$，

(1) f是单调递增的吗？

是

(2) f是严格单调递增的吗？

不是

例题

3. 设A为集合，则A的每一个子集A‘都对应于一个特征函数，不同的子集对应于不同的特征函数。例如A={a，b，c}，则有

$$x_{\{a\}} = \{<a,1>,<b,0>,<c,0>\}$$

$$x_{\varnothing} = \{<a,0>,<b,0>,<c,0>\}$$

$$x_{\{a,b\}} = \{<a,1>,<b,1>,<c,0>\}$$

例题

4. 给定集合A和A上的等价关系R，就可以确定一个自然映射

$$g: A \to A/R$$

例如 $A=\{1,2,3\}$，

$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}\cup I_A$是A上的等价关系，

那么确定函数g。

有$g(1)=g(2)=\{1,2\}$，$g(3)=\{3\}$。

不同的等价关系将确定不同的自然映射。

目录

- 5.1 函数的定义
- 5.2 像与完全原像
- 5.3 函数的性质

像与完全原像

- 定义：设函数f：$A \rightarrow B$，　$A_1 \subseteq A$，　$B_1 \subseteq B$。

  1) 令$f(A_1)=\{f(x) | x \in A_1\}$，称$f(A_1)$为**$A_1$**在**f**下的像。

  当$A_1=A$时称$f(A)$为函数的像。

  2) 令$f^{-1}(B_1)=\{x | x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$，称$f^{-1}(B_1)$为**$B_1$**在**f**下的完全原像。

- 函数的值和像两个不同的概念。函数值$f(x) \in B$，而像$f(A_1) \subseteq B$。

- 设$B_1 \subseteq B$，显然B_1在f下的完全原像 $f^{-1}(B_1)$是A的子集，考虑$A_1 \subseteq A$，那么$f(A_1) \subseteq B$。

  $f(A_1)$的完全原像就是$f^{-1}(f(A_1))$。

- 一般说来$f^{-1}(f(A_1)) \neq A_1$，

  但是$A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$。

- 例如函数 f：$\{1,2,3\} \rightarrow \{0,1\}$，满足

$$f(1)=f(2)=0, \quad f(3)=1,$$

令$A_1=\{1\}$，那么有

$$f^{-1}(f(A_1))$$

$$=f^{-1}(f(\{1\}))=f^{-1}(\{0\})=\{1,2\},$$

这时 $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$。

例题

- 例**3**：设f：N→N,且

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & 若x为偶数\\ x+1 & 若x为奇数\end{cases}$$

- 令A={0,1}，B={2}，那么有

  f(A)=f({0,1})={f(0),f(1)}={0,2}

  f^{-1}(B)= f^{-1}({2})={1,4}

目录

函数的性质

- 定义：设f：A→B，

  1)若ranf=B，则称f：A→B是**满射**的。

  2)若y∈ranf都存在唯一的x∈A使得f(x)=y，则称f：A→B是**单射**的。

  3)若f：A→B既是满射又是单射的，则称f：A→B是**双射**的(或一一映像)。

- 如果f：$A \to B$是满射的，则对于任意的$y \in B$，都存在$x \in A$，使得$f(x)=y$。

- 如果f：$A \to B$是单射的，则对于x_1，$x_2 \in A$，$x_1 \neq x_2$，一定有$f(x_1) \neq f(x_2)$。换句话说，如果对于x_1，$x_2 \in A$有$f(x_1)=f(x_2)$，则一定有$x_1=x_2$。

例题

- **例4：** 判断下面函数是否为单射，满射，双射的，为什么?

  (1) f：$R \to R$，$f(x)= -x^2+2x-1$

  (2) f：$Z^+ \to R$，$f(x)=\ln x$，Z^+为正整数集

  (3) f：$R \to Z$，$f(x)= \lfloor x \rfloor$

  (4) f：$R \to R$，$f(x)=2x+1$

  (5) f：$R^+ \to R^+$，$f(x)=(x^2+1)/x$，其中R^+为正实数集。

例5 对于以下各题给定的A，B和f，判断是否构成函数f：A→B。如果是，说明f：A→B是否为单射,满射,双射的。并根据要求进行计算。

1) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{6,7,8,9,10\}$，$f=\{<1,8>,<3,9>,<4,10>,<2,6>,<5,9>\}$。

2) A,B同(1)，$f=\{<1,7>,<2,6>,<4,5>,<1,9>,<5,10>\}$。

3) A,B同(1)，$f=\{<1,8>,<3,10>,<2,6>,<4,9>\}$。

4) $A=B=R$，$f(x)=x^3$。

5) $A=B=R^+$，$f(x)=x/(x^2+1)$。

6) $A=B=R\times R$，$f(<x,y>)=<x+y,x-y>$，令$L=\{<x,y>|x,y\in R\wedge y=x+1\}$，计算$f(L)$。

7) $A=N\times N$，$B=N$，$f(<x,y>)=|x^2-y^2|$。计算$f(N\times\{0\}),f^{-1}(\{0\})$。

例题

- **例6** 对于给定的集合A和B构造双射函数f：A→B。

  1) $A=P(\{1,2,3\})$，$B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

  2) $A=[0,1]$，$B=[1/4,1/2]$

  3) $A=Z$，$B=N$

  4) $A=[\pi/2,3\pi/2]$，$B=[-1,1]$