集合论与图论04

等价关系与偏序关系

何英华
hyh@tju.edu.cn

目录

一、等价关系

- 定义：设R为非空集合上的关系。如果R是自反的、对称的和传递的，则称R为A上的**等价关系**。设R是一个等价关系，
  若<x，y>∈R，称x**等价于**y，记做x～y。

- 恒等关系I_A：
  不是
- 全域关系E_A：
  不是
- 整数集合Z上的小于等于关系：
  不是
- 模n同余关系：
  是

- **例1**：设A={1,2,…,7}，那么A上的关系R：
  R={<x，y>|x，y∈A∧x≡y(mod 3)}
  是等价关系。
  其中x≡y(mod 3)叫做x与y模3相等，即x除以3的余数与y除以3的余数相等。

二、等价类

- 定义：设R为非空集合A上的等价关系，令x∈A
  $[x]_R$={y|y∈A∧xRy}
  称$[x]_R$为x关于R的**等价类**，简称为x的等价类，简记为[x]。
- 从以上定义可以知道，x的等价类是A中所有与x等价的元素构成的集合。例1中的等价类是：
  [1]=[4]=[7]={1,4,7}
  [2]=[5]=[8]={2,5,8}
  [3]=[6]={3,6}

等价类的性质

- **定理**：设R是非空集合A上的等价关系，则
  1）$\forall x \in A$，[x]是A的非空子集。
  2）$\forall$ x,y$\in$A，如果xRy，则[x]=[y]。
  3）$\forall$ x,y$\in$A，如果xRy不成立，则[x]与[y]不交。
  4）$\cup\{[x] \mid x \in A\}=A$

证明：

1）x$\in$[x]，[x] $\subseteq$A。
2）集合相等。
3）反正法。
4）集合相等。

三、商集

- **定义**：设R为非空集合A上的等价关系，以R的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的**商集**，记做A/R，即$A/R=\{[x]_R \mid x \in A\}$
- 例1中的商集为{{1,4,7},{2,5,8},{3,6}}
- 恒等关系：$A/I_A=\{\{1\},\{2\},\{3\},...,\{7\}\}$
- 全域关系：$A/E_A=\{\{1,2,...,7\}\}$

- 设R是整数集Z上的模n的等价关系，那么根据除以n的余数分别为0，1，2，…，n-1，将整数集合划分成n个等价类，即

$$[0]=\{nk \mid k \in Z\}$$
$$[1]=\{nk+1 \mid k \in Z\}$$
$$\cdots$$
$$[n-1]=\{nk+n-1 \mid k \in Z\}$$

所有等价类的集合构成的商集是：

$$Z/R=\{[0],[1],...,[n-1]\}$$

四、集合的划分

- **定义**：设A为非空集合，若A的子集族π(π是A的子集构成的集合，π ⊆ P(A))满足下面的条件：
  1）$\varnothing \notin \pi$
  2）$\forall x \forall y(x,y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y=\varnothing)$
  3）$\cup \pi=A$
  则称π是A的一个**划分**，称π中的元素为A的**划分块**。
- A上的等价关系与A的划分一一对应。任给A上的一个等价关系R，商集A/R就是A的一个划分。反之，任给A的一个划分π，如下定义A上的关系R：R={<x,y>|x,y∈A∧x与y在π的同一划分块中}

例题

- **例2** 设A＝{a,b,c,d}，给定$\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$,如下：

π_1={{a,b,c},{d}}
π_2={{a,b},{c},{d}}
π_3={{a},{a,b,c,d}}
π_4={{a,b},{c}}
π_5={∅,{a,b},{c,d}}
π_6={{a,{a}},{b,c,d}}

- π_1和π_2是A的划分，其他都不是A的划分。

- **例3** 给出A＝{1,2,3}上所有的等价关系。

目录

- 4.1 等价关系
- 4.2 偏序关系
  - 基本概念
  - 偏序集与哈斯图
  - 偏序集中的特殊元素

一、基本概念

- **定义：**设R为非空集合A上的关系。如果R是自反的、反对称的和传递的，则称R为A上的**偏序关系**，简称偏序，记作≼。设≼为偏序关系，如果<x，y>∈≼，则记作x≼y，读作“小于或等于”。

一、基本概念

- 正整数上的整除关系
  偏序关系
  3≼6的含义是3整除6。
- 正整数上的大于或等于关系
  偏序关系
  针对这个关系写5≼4是说大于或等于关系中5排在5的前边，也就是5比4大。

拟序关系，可比

- **定义：**设≼为非空集合A上的偏序关系，
  (1)x，y∈A，x≺y⇔x≼y∧x≠y。
  (2)x，y∈A，x与y可比x≼y∨y≼x。
  其中≺ 称为拟序关系，简称拟序，x≺y读作x“小于”y。
- 在具有偏序关系的集合A中任取两个元素x和y，可能有以下几种情况：
  x≺y(或y≺x)，
  x＝y，
  x与y不是可比的。

- 例如A＝{1，2，3}，是A上的整除关系，则有

1 2	1≺2
1 3	1≺3
1 1	1=1
2 2	2=2
3 3	3=3
2 3	2和3不可比

全序关系、覆盖

- 定义：设R为非空集合A上的偏序关系，如果x，y∈A，x与y都是可比的，则称R为A上的全序关系(或线序关系)。

全序关系、覆盖

- 数集上的小于或等于关系
  全序关系
  因为任何两个数总是可比大小的。
- 整除关系
  不是全序关系
  如集合{1,2,3}上的整除关系就不是全序关系，因为2和3不可比。

全序关系、覆盖

- 定义：设≺为非空集合A上的偏序关系，x,y∈A，如果x≺y且不存在z∈A使得x≺y≺z，则称y覆盖x。

全序关系、覆盖

- 例如{1,2,4,6}集合上的整除关系，
  - 有2覆盖1；
  - 4和6都覆盖2；
  - 但4不覆盖1，因为有1≺2≺4；
  - 6也不覆盖4，因为4≺6不成立。

二、偏序集与哈斯图

- **定义**：集合A和A上的偏序关系≼一起叫做偏序集，记作<A, ≼>。
- 例：
  整数集合Z和数的小于或等于关系≤
  构成偏序集<Z,≤>
- 集合A的幂集P(A)包含关系⊆
  构成**偏序集**<P(A),⊆>

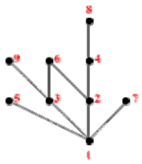
- 例4：设<A,R>,<B,S>是偏序集，证明<A×B,T>也是偏序集，其中T满足<x,y>T<u,v>⇔xRu∧ySv

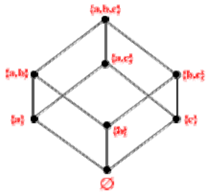
哈斯图

- 利用偏序关系的自反性、反对称性和传递性可以简化一个偏序关系的关系图，得到偏序集的**哈斯图**。
- 在画偏序集<A,≼>哈斯图时，首先适当排列顶点的顺序使得：x，y∈A，若x≺y，则将x画在y的下方。对于A中的两个不同元素x和y，如果y覆盖x，就用一条线段连接x和y。

例题

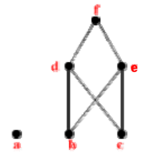
- **例5:** 画出偏序集<{1,2,3,4,5,6,7,8,9}，|>和<P({a,b,c}),⊆>的哈斯图。





例题

- **例6**：已知偏序集<A,R>的哈斯图如下图所示，试求出集合A和关系R的表达式。



A={a,b,c,d,e,f}
R={<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>, <e,f>}∪I_A

拟序

- 定义：设R为非空集合A上的关系，如果R是反自反的和传递的，则称R是A上的拟序关系，简称为拟序，记作<。
- **定义：**设≼为非空集合A上的偏序关系，
  x，y∈A，x<y⇔x≼y∧x≠y。

  其中< 称为拟序关系，简称拟序，x<y读作x“小于”y。

三、偏序集中的特殊元素

- **定义：**设<A, ≼>为偏序集，B⊆A，y∈B。
  1）若∀x(x∈B→y≼x)成立，则称y为B的**最小元**。
  2）若∀x(x∈B→x≼y)成立，则称y为B的**最大元**。
  3）若∀x(x∈B∧x≼y→x=y)成立，则称y为B的**极小元**。
  4）若∀x(x∈B∧y≼x→x=y)成立，则称y为B的**极大元**。

三、偏序集中的特殊元素

可比

– 最小元
  是最小的元素，它与B中其它元素都可比；

– 极小元
  不一定与B中元素可比，只要没有比它小的元素，它就是极小元。

三、偏序集中的特殊元素

存在性
– 极小(大)元
  对于有穷集B，极小(大)元一定存在，而且可能有多个。
– 最小(大)元
  不一定存在，但如果存在，一定是唯一的。

最小(大)元与极小(大)元的关系

– 最小(大)元一定是极小(大)元。

– 如果B中只有一个极小(大)元，则它一定是B的最小(大)元。

例题

- **例5:** 画出偏序集<{1,2,3,4,5,6,7,8,9}，|>和<P({a,b,c}),⊆>的哈斯图。

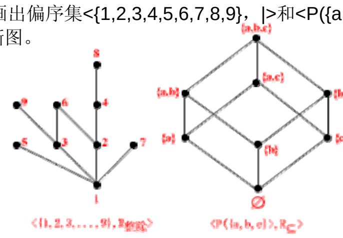


图7.7

极小元：a,b,c,g，
极大元：a,f,h。
没有最小元与最大元。
由这个例子可以知道，哈斯图中的孤立顶点既是极小元也是极大元。

例题

- **例:** 设X为集合，A＝P(X)－{∅}－{X}，且A≠∅。若|X|=n，n>=2，问：
  1） 偏序集<A,⊆>是否存在最大元？
  2） 偏序集<A, ⊆ >是否存在最小元？
  3） 偏序集<A, ⊆ >中极大元和极小元的一般形式是什么？并说明理由。

- **定义：** 设<A，≼>为偏序集，B⊆A，y∈A。
  1） 若x(x∈B→x ≼ y)成立，则称y为B的**上界**。
  2） 若x(x∈B→y ≼ x)成立，则称y为B的**下界**。
  3） 令C＝{y|y为B的上界}，则称C的最小元为B的**最小上界或上确界**。
  4） 令D＝{y|y为B的下界}，则称D的最大元为B的**最大下界或下确界**。

- B的最小元一定是B的下界，同时也是B的最大下界。
- 同样的，B的最大元一定是B的上界，同时也是B的最小上界。

但反过来不一定正确

- B的下界不一定是B的最小元，因为它可能不是B中的元素。
- B的上界也不一定是B的最大元

- B的上界，下界，最小上界，最大下界都可能不存在。如果存在，最小上界与最大下界是唯一的。

- **例5:** 画出偏序集<{1,2,3,4,5,6,7,8,9}，|>和<P({a,b,c}),⊆>的哈斯图。

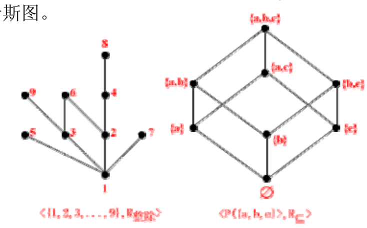


图7.7

- 令B＝{b，c，d}
- B的下界和最大下界都不存在；
- 上界有d和f，最小上界为d。

作业

- 4.10
- 4.17
- 4.28
- 4.32
- 4.38