



集合论与图论04

等价关系与偏序关系

何英华

hyh@tju.edu.cn

目录

- 4.1 等价关系
 - 等价关系
 - 等价类
 - 商集
 - 集合的划分
- 4.2 偏序关系

一、等价关系

- 定义：设 R 为非空集合上的关系。如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。设 R 是一个等价关系，若 $\langle x, y \rangle \in R$ ，称 x 等价于 y ，记做 $x \sim y$ 。
- 例1：设 $A=\{1,2,\dots,7\}$ ，那么 A 上的关系 R ：
$$R=\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3}\}$$
是等价关系。其中 $x \equiv y \pmod{3}$ 叫做 x 与 y 模3相等，即 x 除以3的余数与 y 除以3的余数相等。

二、等价类

- 定义：设 R 为非空集合 A 上的等价关系，令 $x \in A$
$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$$
称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类，简称为 x 的等价类，简记为 $[x]$ 。
- 从以上定义可以知道， x 的等价类是 A 中所有与 x 等价的元素构成的集合。例1中的等价类是：
$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$
$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$
$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

等价类的性质

- 定理：设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则
 - 1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是 A 的非空子集。
 - 2) $\forall x, y \in A$, 如果 xRy , 则 $[x]=[y]$ 。
 - 3) $\forall x, y \in A$, 如果 xRy 不成立, 则 $[x]$ 与 $[y]$ 不交。
 - 4) $\cup \{[x] | x \in A\} = A$

证明：

- 1) $x \in [x]$, $[x] \subseteq A$ 。
- 2) 集合相等。
- 3) 反正法。
- 4) 集合相等。

三、商集

- 定义：设 R 为非空集合 A 上的等价关系，以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集，记做 A/R ，即 $A/R = \{[x]_R | x \in A\}$
- 例1中的商集为 $\{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$

四、集合的划分

- 定义：设 A 为非空集合，若 A 的子集族 π (π 是 A 的子集构成的集合， $\pi \subseteq P(A)$) 满足下面的条件：

1) $\emptyset \notin \pi$

2) $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$

3) $\bigcup \pi = A$

则称 π 是 A 的一个划分，称 π 中的元素为 A 的划分块。

- A 上的等价关系与 A 的划分一一对应。任给 A 上的一个等价关系 R ，商集 A/R 就是 A 的一个划分。反之，任给 A 的一个划分 π ，如下定义 A 上的关系 R ： $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \text{ 与 } y \text{ 在 } \pi \text{ 的同一划分块中} \}$

例题

- **例2** 设 $A=\{a,b,c,d\}$, 给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$, 如下:

$$\pi_1 = \{\{a,b,c\}, \{d\}\}$$

$$\pi_2 = \{\{a,b\}, \{c\}, \{d\}\}$$

$$\pi_3 = \{\{a\}, \{a,b,c,d\}\}$$

$$\pi_4 = \{\{a,b\}, \{c\}\}$$

$$\pi_5 = \{\emptyset, \{a,b\}, \{c,d\}\}$$

$$\pi_6 = \{\{a, \{a\}\}, \{b,c,d\}\}$$

- **例3** 给出 $A=\{1,2,3\}$ 上所有的等价关系。

目录

- 4.1 等价关系
- 4.2 偏序关系
 - 基本概念
 - 偏序集与哈斯图
 - 偏序集中的特殊元素

一、基本概念

- 定义：设 R 为非空集合 A 上的关系。如果 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 为 A 上的偏序关系，简称偏序，记作 $\leq$ 。设 $\leq$ 为偏序关系，如果 $\langle x, y \rangle \in \leq$ ，则记作 $x \leq y$ ，读作“小于或等于”。
- 例如：正整数上的整除关系是偏序关系， $3 \leq 6$ 的含义是3整除6。正整数上的大于或等于关系也是偏序关系，针对这个关系写 $5 \leq 4$ 是说大于或等于关系中5排在4的前边，也就是5比4大。

拟序关系，可比

- 定义：设 $\leq$ 为非空集合 A 上的偏序关系，
 (1) $x, y \in A, x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$ 。
 (2) $x, y \in A, x$ 与 y 可比 $x \leq y \vee y \leq x$ 。
 其中 $<$ 称为拟序关系，简称拟序， $x < y$ 读作 x “小于” y 。
- 在具有偏序关系的集合 A 中任取两个元素 x 和 y ，可能有以下几种情况： $x < y$ (或 $y < x$)， $x = y$ ， x 与 y 不是可比的。
- 例如 $A = \{1, 2, 3\}$ ，是 A 上的整除关系，则有
 $1 < 2, 1 < 3,$
 $1 = 1, 2 = 2, 3 = 3,$
 2 和 3 不可比

全序关系、覆盖

- 定义：设 R 为非空集合 A 上的偏序关系，如果 $x, y \in A$ ， x 与 y 都是可比的，则称 R 为 A 上的全序关系(或线序关系)。
- 例如数集上的小于或等于关系是全序关系，因为任何两个数总是可比大小的。但整除关系一般来说不是全序关系，如集合 $\{1, 2, 3\}$ 上的整除关系就不是全序关系，因为2和3不可比。
- 定义：设 $<$ 为非空集合 A 上的偏序关系， $x, y \in A$ ，如果 $x < y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x < y < z$ ，则称 y 覆盖 x 。
- 例如 $\{1, 2, 4, 6\}$ 集合上的整除关系，有2覆盖1，4和6都覆盖2。但4不覆盖1，因为有 $1 < 2 < 4$ 。6也不覆盖4，因为 $4 < 6$ 不成立。

二、偏序集与哈斯图

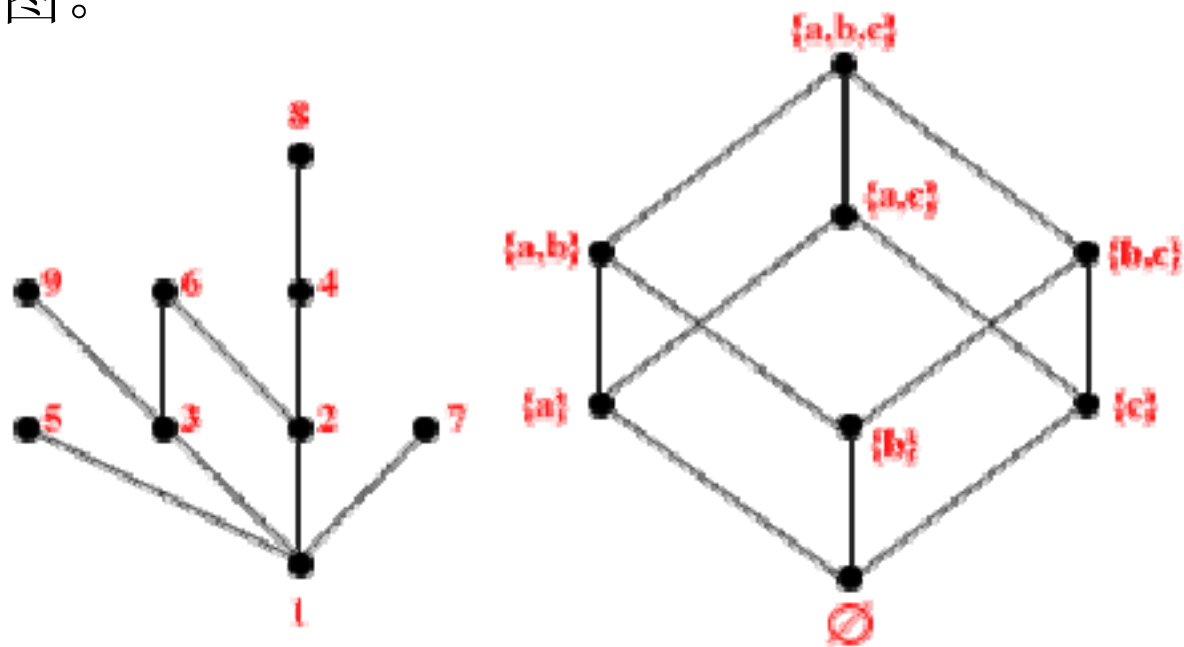
- 定义：集合 A 和 A 上的偏序关系 $\leq$ 一起叫做偏序集，记作 $\langle A, \leq \rangle$ 。
- 例如整数集合 $\mathbb{Z}$ 和数的小于或等于关系 $\leq$ 构成偏序集 $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ ，集合 A 的幂集 $P(A)$ 和包含关系 $\subseteq$ 构成偏序集 $\langle P(A), \subseteq \rangle$ 。
- 例4：设 $\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$ 是偏序集，证明 $\langle A \times B, T \rangle$ 也是偏序集，其中 T 满足 $\langle x, y \rangle T \langle u, v \rangle \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$

哈斯图

- 利用偏序关系的自反性、反对称性和传递性可以简化一个偏序关系的关系图，得到偏序集的哈斯图。
- 在画偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 哈斯图时，首先适当排列顶点的顺序使得： $x, y \in A$ ，若 $x < y$ ，则将 x 画在 y 的下方。对于 A 中的两个不同元素 x 和 y ，如果 y 覆盖 x ，就用一条线段连接 x 和 y 。

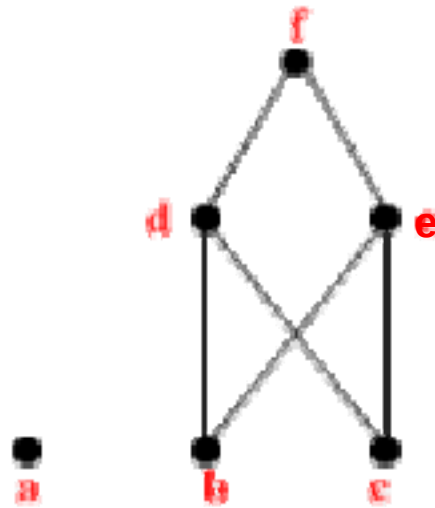
例题

- 例5: 画出偏序集 $\langle \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, | \rangle$ 和 $\langle P(\{a,b,c\}), \subseteq \rangle$ 的哈斯图。



例题

- **例6:** 已知偏序集 $\langle A, R \rangle$ 的哈斯图如下图所示，试求出集合 A 和关系 R 的表达式。



$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$R = \{\langle b, d \rangle, \langle b, e \rangle, \langle b, f \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, f \rangle\} \cup I_A$$

三、偏序集中的特殊元素

- 定义：设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集， $B \subseteq A$ ， $y \in B$ 。
 - 1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立，则称 y 为 B 的最小元。
 - 2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立，则称 y 为 B 的最大元。
 - 3) 若 $\forall x(x \in B \wedge x \leq y \rightarrow x = y)$ 成立，则称 y 为 B 的极小元。
 - 4) 若 $\forall x(x \in B \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$ 成立，则称 y 为 B 的极大元。
- 最小元是 B 中最小的元素，它与 B 中其它元素都可比；而极小元不一定与 B 中元素可比，只要没有比它小的元素，它就是极小元。
- 对于有穷集 B ，极小(大)元一定存在，而且可能有多个。最小(大)元不一定存在，但如果存在，一定是唯一的。最小(大)元一定是极小(大)元。如果 B 中只有一个极小(大)元，则它一定是 B 的最小(大)元。

例题

- 例5中，极小元： a, b, c, g ，极大元： a, f, h 。没有最小元与最大元。由这个例子可以知道，哈斯图中的孤立顶点既是极小元也是极大元。
- 例：设 X 为集合， $A = P(X) - \{\emptyset\} - \{X\}$ ，且 $A \neq \emptyset$ 。若 $|X|=n$ ，问：
 - 1) 偏序集 $\langle A, \subseteq \rangle$ 是否存在最大元？
 - 2) 偏序集 $\langle A, \subseteq \rangle$ 是否存在最小元？
 - 3) 偏序集 $\langle A, \subseteq \rangle$ 中极大元和极小元的一般形式是什么？并说明理由。

- 定义： 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集， $B \subseteq A$ ， $y \in A$ 。
 - 1) 若 $x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立，则称 y 为 B 的上界。
 - 2) 若 $x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立，则称 y 为 B 的下界。
 - 3) 令 $C = \{y | y \text{ 为 } B \text{ 的上界}\}$ ，则称 C 的最小元为 B 的最小上界或上确界。
 - 4) 令 $D = \{y | y \text{ 为 } B \text{ 的下界}\}$ ，则称 D 的最大元为 B 的最大下界或下确界。
- 由以上定义可知， B 的最小元一定是 B 的下界，同时也是 B 的最大下界。同样的， B 的最大元一定是 B 的上界，同时也是 B 的最小上界。但反过来不一定正确， B 的下界不一定是 B 的最小元，因为它可能不是 B 中的元素。同样的， B 的上界也不一定是 B 的最大元。

例题

- B 的上界，下界，最小上界，最大下界都可能不存在。如果存在，最小上界与最大下界是唯一的。
- 考虑例5中的偏序集。令 $B=\{b, c, d\}$ ，则 B 的下界和最大下界都不存在，上界有 d 和 f ，最小上界为 d 。

作业

- 4.10
- 4.17
- 4.28
- 4.32
- 4.38