集合论与图论02

关系的性质

何英华
hyh@tju.edu.cn

目录

- 关系性质的定义和判别
- 关系的闭包

定义4.14 设R是集合A上的关系

(1) 如果 $\forall x(x \in A \to <x,x> \in R)$，则称R在A上自反。

(2) 如果 $\forall x(x \in A \to <x,x> \notin R)$，则称R在A上反自反。

- 恒等关系I_A，全域关系EA，小于等于关系LA，整除关系DA都是给定集合A上的自反关系。
- 空关系 Φ，小于关系是A上反自反的关系。

- 例4.11 设A={a,b,c}，
  R_1={<a,a>,<b,b>,<b,c>,<c,c>}
  R_2={<a,b>}
  R_3={<a,a>,<a,b>}

R_1是自反的但不是反自反的；
R_2是反自反的但不是自反的；
R_3既不是自反的也不是反自反的。

- 对于任何集合A，最大的自反关系是E_A，最小的自反关系是I_A，最大的反自反关系是E_A-I_A，最小的反自反关系是空关系。
- A上任何自反关系R都满足 $I_A \subseteq R$ ，A上任何反自反关系R都满足 $R \cap I_A = \Phi$ 。

- 从关系矩阵的特点来看，自反关系的关系矩阵的主对角线元素全是1，反自反关系的关系矩阵的主对角线元素全是0。
- 从关系图的特点来看，自反关系的关系图中每个结点都有过自身的环，反自反关系图中每个结点都没有环。

- 定义4.15 设R是集合A上的关系，

（1）如果 $\forall x\forall y(x,y\in A\wedge <x,y>\in R\rightarrow <y,x>\in R)$ ，则称R在A上对称。

（2）如果 $\forall x\forall y(x,y\in A\wedge <x,y>\in R\wedge <y,x>\in R\rightarrow x=y)$ 则称R在A上反对称。

对于A上的反对称关系R也可以定义为：

$$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge <x,y>\in R\wedge x\neq y\rightarrow <y,x>\notin R)$$

- 空关系Φ，恒等关系I_A，全域关系E_A都是A上对称的关系。空关系Φ和恒等关系I_A也是A上反对称的关系。小于等于关系、小于关系、整除关系、包含关系等都是相应集合上的反对称关系。

- 例4.12 设A={a,b,c}，

  R_1={<a,a>,<b,b>,<b,c>,<c,b>}

  R_2={<a,b>,<c,a>}

  R_3={<a,a>,<b,b>}

  R_4={<a,b>,<b,a>,<a,c>}

R_1是对称的但不是反对称的，R_2是反对称的但不是对称的，R_3既是对称的又是反对称的，R_4既不是对称的也不是反对称的。

- 对于任何集合A，最小的对称关系是空关系Φ，最大的对称关系是全域关系E_A，最小的反对称关系是Φ；

A上任何对称关系R都满足R=R^{-1}，任何反对称关系R都满足 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

- 定义4.16 设R是集合A上的关系，如果

$$\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge <x,y>\in R\wedge <y,z>\in R\rightarrow <x,z>\in R)$$

则称R是传递的。

集合A上的空关系Φ，恒等关系I_A，全域关系E_A，小于等于关系L_A，整除关系D_A，包含关系等都是传递关系。

- 例4.13 设A={a,b,c}

  R_1={<a,b>,<b,c>,<a,c>}

  R_2={<a,b>,<b,a>}

  R_3={<a,a>,<b,b>}

R_1，R_3和R_4是传递的，R_2不是传递的。

目录

- 关系性质的定义和判别
- 关系的闭包

- 定义4.17 设R是非空集合A上的关系，R的自反（对称或传递）闭包是A上的关系R’，使得R’满足以下条件：

  （1）R’是自反的（对称的或传递的）

  （2） $R \subseteq R'$

  （3）对A上任何包含R的自反（对称或传递）关系R”有 $R' \subseteq R''$ 。

  自反闭包r(R), 对称闭包记作r(R)，传递闭包记作t(R)。

- 定理4.7 设R为A上的关系，则有

  (1) $r(R) = R \cup R^0$

  (2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

  (3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

- 例4.16 设A={a,b,c,d}

  R={<a,b>,<a,c>,<b,c>,<c,d>,<d,c>}

  求r(R),s(R),t(R).