集合论与图论02

关系的性质

何英华

hyh@tju.edu.cn

目录

- 关系性质的定义和判别

- 关系的闭包

定义4.14 设R是集合A上的关系

(1) 如果 $\forall x(x \in A \rightarrow < x, x > \in R)$，则称R在A上自反。

(2) 如果$\forall x(x \in A \rightarrow < x, x > \notin R)$，则称R在A上反自反。

- 恒等关系I_A，全域关系EA，小于等于关系LA，整除关系DA都是给定集合A上的自反关系。
- 空关系 Φ，小于关系是A上反自反的关系。

- 例4.11 设A={a,b,c}，

  R_1={<a,a>,<b,b>,<b,c>,<c,c>}

  R_2={<a,b>}

  R_3={<a,a>,<a,b>}

R_1是自反的但不是反自反的；

R_2是反自反的但不是自反的；

R_3既不是自反的也不是反自反的。

- 对于任何集合A，最大的自反关系是E_A，最小的自反关系是I_A，最大的反自反关系是E_A-I_A，最小的反自反关系是空关系。
- A上任何自反关系R都满足 $I_A \subseteq R$ ，A上任何反自反关系R都满足 $R \cap I_A = \Phi$ 。

- 从关系矩阵的特点来看，自反关系的关系矩阵的主对角线元素全是1，反自反关系的关系矩阵的主对角线元素全是0。

- 从关系图的特点来看，自反关系的关系图中每个结点都有过自身的环，反自反关系图中每个结点都没有环。

- 定义4.15 设R是集合A上的关系，

（1）如果 $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge <x, y> \in R \to <y, x> \in R)$ ，则称R在A上对称。

（2）如果 $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge <x, y> \in R \wedge <y, x> \in R \to x = y)$

则称R在A上反对称。

对于A上的反对称关系R也可以定义为：

$$\forall x \forall y(x, y \in A \wedge <x, y> \in R \wedge x \neq y \to <y, x> \notin R)$$

- 空关系Φ ，恒等关系I_A，全域关系E_A都是A上对称的关系。空关系 Φ 和恒等关系I_A也是A上反对称的关系。小于等于关系、小于关系、整除关系、包含关系等都是相应集合上的反对称关系。

- 例4.12 设A={a,b,c}，

  $R_1=\{<a,a>,<b,b>,<b,c>,<c,b>\}$

  $R_2=\{<a,b>,<c,a>\}$

  $R_3=\{<a,a>,<b,b>\}$

  $R_4=\{<a,b>,<b,a>,<a,c>\}$

  R_1是对称的但不是反对称的，R_2是反对称的但不是对称的，R_3既是对称的又是反对称的，R_4既不是对称的也不是反对称的。

- 对于任何集合A，最小的对称关系是空关系 Φ ，最大的对称关系是全域关系E_A，最小的反对称关系是Φ ；

A上任何对称关系R都满足$R=R^{-1}$，任何反对称关系R都满足 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

- 定义4.16 设R是集合A上的关系，如果

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge < x, y > \in R \wedge < y, z > \in R \rightarrow < x, z > \in R)$$

则称R是传递的。

集合A上的空关系 Φ ，恒等关系I_A，全域关系E_A，小于等于关系L_A，整除关系D_A，包含关系等都是传递关系。

- 例4.13 设$A=\{a,b,c\}$

  $R_1=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$

  $R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$

  $R_3=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$

R_1，R_3和R_4是传递的，R_2不是传递的。

目录

- 关系性质的定义和判别
- 关系的闭包

- 定义4.17 设R是非空集合A上的关系，R的自反（对称或传递）闭包是A上的关系R’，使得R’满足以下条件：

（1）R’是自反的（对称的或传递的）

（2）$R \subseteq R'$

（3）对A上任何包含R的自反（对称或传递）关系R”有 $R' \subseteq R''$ 。

自反闭包r(R), 对称闭包记作r(R)，传递闭包记作t(R)。

- 定理4.7 设R为A上的关系，则有

  (1) $r(R)=R\bigcup R^{0}$

  (2) $s(R)=R\bigcup R^{-1}$

  (3) $t(R)=R\bigcup R^{2}\bigcup R^{3}\bigcup\cdots$

- 例4.16 设A={a,b,c,d}

  R={<a,b>,<a,c>,<b,c>,<c,d>,<d,c>}

  求r(R),s(R),t(R).