集合论与图论02

# 关系及其运算

何英华
*hyh@tju.edu.cn*

## 目录



## 有序对

- 定义：由两个元素x和y按一定顺序排列成的二元组叫做一个**有序对**，记作$<x,y>$，其中x是它的第一元素，y是它的第二元素。
- 有序对$<x,y>$用集合表示为$\{\{x\},\{x,y\}\}$。
  - $\{0,1\}$和$\{1,0\}$相等
  - $<0,1>$和$<1,0>$不相等
- 定理：$<x,y>=<u,v>$的充分必要条件是x=u且y=v。
- 例：已知$<x+2,4>=<5,2x+y>$，求x和y。

## 有序n元组

- 定义：有序三元组
  $<a,b,c>=<<a,b>,c>$
- 定义：有序n(≥2)元组
  $<a_1,a_2,\ldots,a_n>=<<a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}>,a_n>$
- 定理: $<a_1,a_2,\ldots,a_n>= <b_1,b_2,\ldots,b_n>$
  $\Leftrightarrow a_i = b_i,\ i=1,2,\ldots,n.$

## 笛卡尔积

- 定义：设A，B为集合,用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合叫做A和B的**笛卡儿积**，记作A×B。
  - 笛卡儿积的符号化表示为$A\times B=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}$
- 例：设A={a,b}, B={0,1,2}，则
  - $A\times B=\{<a,0>,<a,1>,<a,2>,<b,0>,<b,1>,<b,2>\}$
  - $B\times A=\{<0,a>,<0,b>,<1,a>,<1,b>,<2,a>,<2,b>\}$
- 定理：如果|A|=m，|B|=n,则|A×B|=mn。

## 笛卡尔积运算的性质

1. 当A或者B为空集时，$A\times B=\varnothing$
2. 笛卡儿积运算不满足交换律，当$A\neq B\wedge A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing$时，$A\times B\neq B\times A$
3. 笛卡儿积运算不满足结合律，当$A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge C\neq\varnothing$时，$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$
4. 笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律，即
   $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$　$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$
   $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$　$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

## n阶笛卡尔积

- 定义：n阶笛卡尔积
  $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ <x_1,x_2,\ldots,x_n> \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n \}$
- 定义：$A^n = A \times A \times \ldots \times A$
- 定理：$|A_i|=n_i, i=1,2,\ldots,n \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_n$.

## 目录

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示
- 关系的基本运算
- 关系的幂运算

## 二元关系与n元关系

- 定义：二元关系是集合，其元素全是有序对。二元关系也可简称为关系。对于二元关系R，如果$<x,y> \in R$，可记作xRy。
- 例：下面的集合中，哪些是关系？
  $R_1=\{<1,2>,<\alpha,\beta>,<a,b>\}$，$R_2=\{<1,2>,<3,4>,<$白菜,小猫$>\}$，$A=\{<a,b>,<1,2,3>,a,\alpha,1\}$
- 定义：n元关系是集合，其元素全是有序n元组。
  - $R_1=\{<1,2,3>,<\alpha,\beta,\gamma>,<a,b,c>\}$是三元关系

## 从A到B的关系与A上的关系

- 定义：设A，B为集合，A×B的任何子集所定义的二元关系叫做**从A到B的二元关系**，特别当A=B时则叫做**A上的二元关系**。
- 例如$A=\{0,1\}$，$B=\{1,2,3\}$，那么$R_1=\{<0,2>\}$，$R_2=A \times B$，$R_3=\varnothing$，$R_4=\{<0,1>\}$等都是从A到B的二元关系，而$R_3$和$R_4$同时也是A上的二元关系。
- 若$|A|=m$，$|B|=n$，则$|A \times B|=mn$，$|P(A \times B)|=2^{mn}$，从A到B不同的二元关系共有$2^{mn}$个，A上不同的二元关系共有$2^{m^2}$个。
  - 设 $A=\{a_1,a_2\}$，$B=\{b\}$，求所有A到B的二元关系。
  - 设 $A=\{a_1,a_2\}$，求所有A上的二元关系。

## A上的特殊关系

- A上的特殊关系
  - 空关系: $\varnothing$
  - 全域关系: $E_A = A \times A = \{ <x,y> \mid x \in A \wedge y \in A\}$
  - 恒等关系: $I_A = \{ <x,x> \mid x \in A \}$
  - 小于等于关系: $LE_A = \{ <x,y> \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \le y \}$
  - 整除关系: $D_A = \{ <x,y> \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x|y \}$
  - 包含关系: $\subseteq_A = \{ <x,y> \mid x \subseteq A \wedge y \subseteq A \wedge x \subseteq y \}$
- 例: 1)设$A=\{1,2,3\}$，求$E_A$、$I_A$、$LE_A$、$D_A$；2)设$A=P(\{a,b\})$，求$\subseteq_A$。

## 目录

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示
- 关系的基本运算
- 关系的幂运算

# 表示为集合

**例：** 设A={1,2,3,4}，下面各式以描述法定义了A上的关系R，试用列举法表示R。
(1) R={<x,y>|x是y的倍数}
(2) R={<x,y>|$(x-y)^2$∈A}
(3) R={<x,y>|x/y是素数}
(4) R={<x,y>|x≠y}

**解：**
(1) R = {<4,4>,<4,2>,<4,1>,<3,3>,<3,1>,<2,2>,<2,1>,<1,1>}
(2) R = {<2,1>,<3,2>,<4,3>,<3,1>,<4,2>,<2,4>,<1,3>,<3,4>,<2,3>,<1,2>}
(3) R = {<2,1>,<3,1>,<4,2>}
(4) R = {<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,1>,<2,3>,<2,4>,<3,1>,<3,2>,<3,4>,<4,1>,<4,2>,<4,3>}

# 表示为关系矩阵

- 设 A={$a_1,a_2,\ldots,a_n$}, R⊆A×A, 则R的关系矩阵

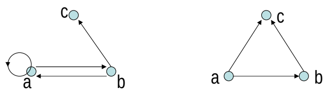
$$M_R=(r_{ij})_{n\times n}，\text{其中 } r_{ij}=\begin{cases}1, & x_iRx_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

- 例：A={a,b,c}, $R_1$={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>}, $R_2$={<a,b>,<a,c>,<b,c>}, 则

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad M_{R_2}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

# 表示为关系图

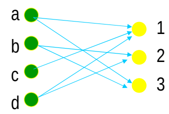
- 设 A={$a_1,a_2,\ldots,a_n$}, R⊆A×A, 则A中元素以"○"表示(称为顶点), R中元素以"→"表示(称为有向边); 若 $x_iRx_j$, 则从顶点$x_i$向顶点$x_j$引有向边<$x_i,x_j$>, 这样得到的图称为R的关系图 $G_R$.
- 例：A={a,b,c}, $R_1$={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>}, $R_2$={<a,b>,<a,c>,<b,c>}, 则




# 从A到B的关系的表示

例：设A={a,b,c,d}，B={1,2,3}，R={<a,1>, <a,3>, <b,2>, <b,3>, <c,1>, <d,1>, <d,2>}

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix},$$




# 目录

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示
- 关系的基本运算
- 关系的幂运算

# 定义域、值域、域

- 定义：设R是二元关系，则
  - 定义域(domain)：domR={x| y(<x,y>∈R)}
  - 值域(range)： ranR={y| x(<x,y>∈R)}
  - 域(field)：fldR=domR∪ranR
- 例：设R={<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>}，则
  - domR={1,2,4}
  - ranR={2,3,4}
  - fldR={1,2,3,4}
- 根据关系的三种表示来确定定义域、值域和域

## 关系的逆

- 定义：设R为二元关系，R的逆关系，简称R的逆，记作$R^{-1}$,其中$R^{-1}$={<x,y>|<y,x>∈R}
- 根据关系三种表示求关系的逆
  - 第一元素和第二元素换位
  - 求矩阵转置
  - 将关系图中的有向边反向
- 例：求$R^{-1}$和$S^{-1}$，其中
  R={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>},
  S={<a,b>,<a,c>,<b,c>}。

## 逆运算的性质

- 定理：设F是任意的关系，则
  (1)$(F^{-1})^{-1}$=F
  (2)dom$F^{-1}$=ranF，ran$F^{-1}$=domF
  - 证明：根据定义直接证明

## 关系的复合（合成）

- **定义**：设R,S为二元关系，R与S的**右复合**记作R◦S，R◦S={<x,z>| ∃y(<x,y>∈R∧<y,z>∈S)}
- **例**：设R={<3,3>,<6,2>},S={<2,3>}，则
  R◦S={<6,3>}，S◦R={<2,3>}


- 类似的也可以定义关系的**左复合**，本课程在提到关系的复合时是指关系的右复合。

## 求关系的复合

- 关系矩阵的乘法，其中加法使用逻辑∨, 乘法使用逻辑∧。
- 在R的关系图后接上S的关系图，找出长为2的路径。

---

- 例：求$R^{-1}$、$S^{-1}$、 R◦S和S◦R，其中
  R={<1,2>,<1,4>,<2,2>,<2,3>},
  S={<1,1>,<1,3>,<2,3>,<3,2>,<3,3>}。

---

- 例：求$R^{-1}$、$S^{-1}$、 R◦S和S◦R，其中
  R={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>},
  S={<a,b>,<a,c>,<b,c>}。

## 复合运算的性质

- **定理：**设F，G，H是任意的关系，则 $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$
- **定理：**设F，G是任意的关系，则 $(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$
- **定理：**设R为A上的关系，则 $R\circ I_A=I_A\circ R=R$

## 目录

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示
- 关系的基本运算
- 关系的幂运算

## 关系的幂

- 设R为A上的关系，n为自然数，则R的**n次幂**定义为：
  （1） $R^0=\{<x,x>|x\in A\}=I_A$
  （2） $R^{n+1}=R^n\circ R$
- 由以上定义可知，对于A上的任何关系$R_1$和$R_2$都有
  $R_1{}^0=R_2{}^0=I_A$
  也就是说，A上任何关系的0次幂都相等，都等于A上的恒等关系$I_A$。
- 此外对于A上的任何关系R都有$R^1=R$，因为
  $R^1=R^0\circ R=I_A\circ R=R$

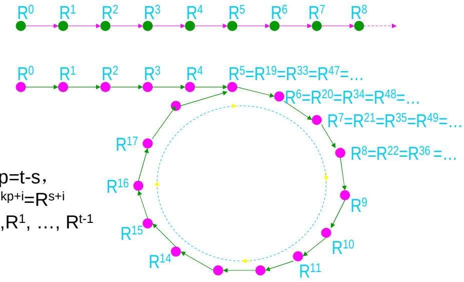
## 求关系的幂

- 如果R是用集合表达式给出的，可以通过n-1次右复合计算得到$R^n$。
- 如果R是用关系矩阵M给出的，则$R^n$的关系矩阵是$M^n$，即n个矩阵M之积。
- 如果R是用关系图G给出的，可以直接由图G得到$R^n$的关系图G'。G'的顶点集与G相同。考察G的每个顶点$x_i$，如果在G中从$x_i$出发经过n步长的路径到达顶点$x_j$，则在G'中加一条从$x_i$到$x_j$的边。当把所有这样的边都找到以后，就得到图G'。
- **例：**设A = {a,b,c,d}，R = {<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>}，求R的各次幂，分别用矩阵和关系图表示。

## 幂运算的性质

- **定理：**设A为n元集，R是A上的关系，则存在自然数s和t, 使得$R^s=R^t$。
  - 鸽巢原理
- **定理：**设R是A上的关系，m,n∈N，则
  (1)$R^m\circ R^n=R^{m+n}$
  (2)$(R^m)^n=R^{mn}$
  - 对任意给定的m ∈N，施归纳于n
- **定理：**设R 是A上的关系，若存在自然数s,t(s<t)使得$R^s=R^t$，则
  (1) 对任何k∈N有$R^{s+k}=R^{t+k}$
  (2) 对任何k,i∈N有$R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中p=t-s
  (3) 令$S=\{R^0，R^1，…，R^{t-1}\}$，则对于任意的q∈N有$R^q\in S$

## $R^0,R^1,R^2,R^3,\ldots$是一个周期性变化的序列




周期是p=t-s，
$R^n=R^{s+kp+i}=R^{s+i}$
值域$R^0,R^1, \ldots, R^{t-1}$

# 例题

- **例**：设A={a,b,d,e,f}，R={<a,b>, <b,a>, <d,e>, <e,f>, <f,d>}。求出最小的自然数m和n，使得$m<n$且$R^m=R^n$。
  - 对于a或b,每个元素的变化周期是2。对于d，e，f，每个元素的变化周期是3。因此必有$R^m=R^{m+6}$，其中6是2和3的最小公倍数。取m=0,n=6即满足题目要求。

- 例: 设 $R\subseteq A\times A$, 化简$R^{100}$的指数. 已知
  (1) $R^7 = R^{15}$; (2) $R^3 = R^5$; (3) $R^1 = R^3$.
  - (1) $R^{100}=R^{7+11\times 8+5}=R^{7+5}=R^{12}\in\{R^0,R^1,\ldots,R^{14}\}$;
  - (2) $R^{100}=R^{3+48\times 2+1}=R^{3+1}=R^4\in\{R^0,R^1,\ldots,R^4\}$;
  - (3) $R^{100}=R^{1+49\times 2+1}=R^{1+1}=R^2\in\{R^0,R^1,R^2\}$.