



集合论与图论02

关系及其运算

何英华

hyh@tju.edu.cn

目录

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示
- 关系的基本运算
- 关系的幂运算

有序对

- 定义：由两个元素 x 和 y 按一定顺序排列成的二元组叫做一个有序对，记作 $\langle x, y \rangle$ ，其中 x 是它的第一元素， y 是它的第二元素。
- 有序对 $\langle x, y \rangle$ 用集合表示为 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ 。
 - $\{0, 1\}$ 和 $\{1, 0\}$ 相等
 - $\langle 0, 1 \rangle$ 和 $\langle 1, 0 \rangle$ 不相等
- 定理： $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ 的充分必要条件是 $x = u$ 且 $y = v$ 。
- 例：已知 $\langle x+2, 4 \rangle = \langle 5, 2x+y \rangle$ ，求 x 和 y 。

有序n元组

- 定义：有序三元组

$$\langle a, b, c \rangle = \langle \langle a, b \rangle, c \rangle$$

- 定义：有序 $n(\geq 2)$ 元组

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle \langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle$$

- 定理： $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$

$$\Leftrightarrow a_i = b_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

笛卡尔积

- 定义：设 A ， B 为集合,用 A 中元素为第一元素， B 中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合叫做 A 和 B 的笛卡儿积，记作 $A \times B$ 。
 - 笛卡儿积的符号化表示为 $A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$
- 例：设 $A = \{a, b\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 则
 - $A \times B = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \}$
 - $B \times A = \{ \langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle \}$
- 定理：如果 $|A|=m$ ， $|B|=n$,则 $|A \times B|=mn$ 。

笛卡尔积运算的性质

1. 当A或者B为空集时, $A \times B = \emptyset$
2. 笛卡儿积运算不满足交换律, 当 $A \neq B \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$ 时, $A \times B \neq B \times A$
3. 笛卡儿积运算不满足结合律, 当 $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge C \neq \emptyset$ 时, $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$
4. 笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律, 即
 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

n阶笛卡尔积

- 定义: n阶笛卡尔积

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n \}$$

- 定义: $A^n = A \times A \times \dots \times A$

- 定理: $|A_i| = n_i, i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow$

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_n.$$

目录

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示
- 关系的基本运算
- 关系的幂运算

二元关系与n元关系

- 定义：二元关系是集合，其元素全是有序对。二元关系也可简称为关系。对于二元关系 R ，如果 $\langle x, y \rangle \in R$ ，可记作 xRy 。
- 例：下面的集合中，哪些是关系？
 $R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle \alpha, \beta \rangle, \langle a, b \rangle\}$ ， $R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle \text{白菜}, \text{小猫} \rangle\}$ ， $A = \{\langle a, b \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle, a, \alpha, 1\}$
- 定义：n元关系是集合，其元素全是有序n元组。
 - $R_1 = \{\langle 1, 2, 3 \rangle, \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle, \langle a, b, c \rangle\}$ 是三元关系

从A到B的关系与A上的关系

- 定义：设A, B为集合, $A \times B$ 的任何子集所定义的二元关系叫做从**A到B**的二元关系, 特别当**A=B**时则叫做**A上的二元关系**。
- 例如**A**={0,1}, **B**={1,2,3}, 那么 $R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A \times B$, $R_3 = \emptyset$, $R_4=\{<0,1>\}$ 等都是从**A到B**的二元关系, 而 R_3 和 R_4 同时也是**A上的二元关系**。
- 若 $|A|=m$, $|B|=n$, 则 $|A \times B|=mn$, $|P(A \times B)|=2^{mn}$, 从**A到B**不同的二元关系共有 2^{mn} 个, **A上**不同的二元关系共有 2^{m^2} 个。
 - 设 $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b\}$, 求所有**A到B**的二元关系。
 - 设 $A=\{a_1,a_2\}$, 求所有**A上**的二元关系。

A上的特殊关系

- A上的特殊关系
 - 空关系: $\emptyset$
 - 全域关系: $E_A = A \times A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \}$
 - 恒等关系: $I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$
 - 小于等于关系: $LE_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \leq y \}$
 - 整除关系: $D_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \mid y \}$
 - 包含关系: $\subseteq_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \subseteq A \wedge y \subseteq A \wedge x \subseteq y \}$
- 例: 1) 设 $A = \{1, 2, 3\}$, 求 E_A 、 I_A 、 LE_A 、 D_A ; 2) 设 $A = P(\{a, b\})$, 求 $\subseteq_A$ 。

目录

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示
- 关系的基本运算
- 关系的幂运算

表示为集合

例：设 $A=\{1,2,3,4\}$ ，下面各式以描述法定义了 A 上的关系 R ，试用列举法表示 R 。

(1) $R=\{<x,y> \mid x \text{ 是 } y \text{ 的倍数}\}$

(2) $R=\{<x,y> \mid (x-y)^2 \in A\}$

(3) $R=\{<x,y> \mid x/y \text{ 是素数}\}$

(4) $R=\{<x,y> \mid x \neq y\}$

解：

(1) $R = \{<4,4>, <4,2>, <4,1>, <3,3>, <3,1>, <2,2>, <2,1>, <1,1>\}$

(2) $R = \{<2,1>, <3,2>, <4,3>, <3,1>, <4,2>, <2,4>, <1,3>, <3,4>, <2,3>, <1,2>\}$

(3) $R = \{<2,1>, <3,1>, <4,2>\}$

(4) $R = \{<1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,3>, <2,4>, <3,1>, <3,2>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,3>\}$

表示为关系矩阵

- 设 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $R \subseteq A \times A$, 则 R 的关系矩阵

$$M_R = (r_{ij})_{n \times n}, \text{ 其中 } r_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i R x_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

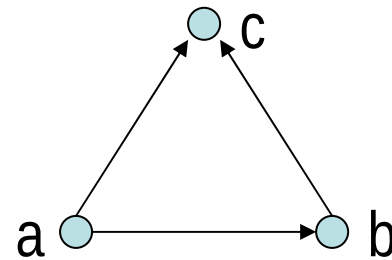
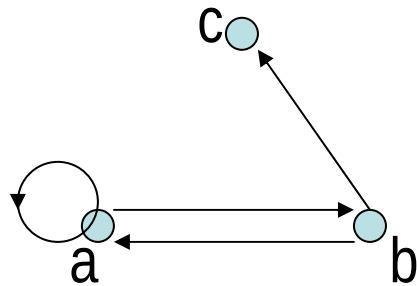
- 例: $A=\{a, b, c\}$, $R_1=\{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, c>\}$,
 $R_2=\{<a, b>, <a, c>, <b, c>\}$, 则

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

表示为关系图

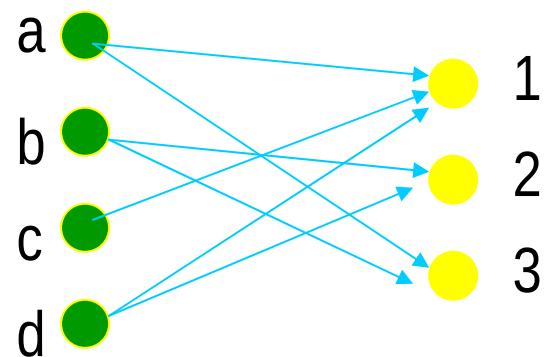
- 设 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $R \subseteq A \times A$, 则 A 中元素以“○”表示(称为顶点), R 中元素以“ $\rightarrow$ ”表示(称为有向边); 若 $x_i R x_j$, 则从顶点 x_i 向顶点 x_j 引有向边 $\langle x_i, x_j \rangle$, 这样得到的图称为 R 的关系图 G_R .
- 例: $A=\{a, b, c\}$, $R_1=\{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle\}$, $R_2=\{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle\}$, 则



从A到B的关系的表示

例： 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{1,2,3\}$, $R=\{<a,1>, <a,3>, <b,2>, <b,3>, <c,1>, <d,1>, <d,2>\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$



目录

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示
- 关系的基本运算
- 关系的幂运算

定义域、值域、域

- 定义：设 R 是二元关系，则
 - 定义域(domain): $\text{dom}R = \{x \mid \exists y (<x,y> \in R)\}$
 - 值域(range): $\text{ran}R = \{y \mid \exists x (<x,y> \in R)\}$
 - 域(field): $\text{fld}R = \text{dom}R \cup \text{ran}R$
- 例：设 $R = \{<1,2>, <1,3>, <2,4>, <4,3>\}$ ，则
 - $\text{dom}R = \{1,2,4\}$
 - $\text{ran}R = \{2,3,4\}$
 - $\text{fld}R = \{1,2,3,4\}$
- 根据关系的三种表示来确定定义域、值域和域

关系的逆

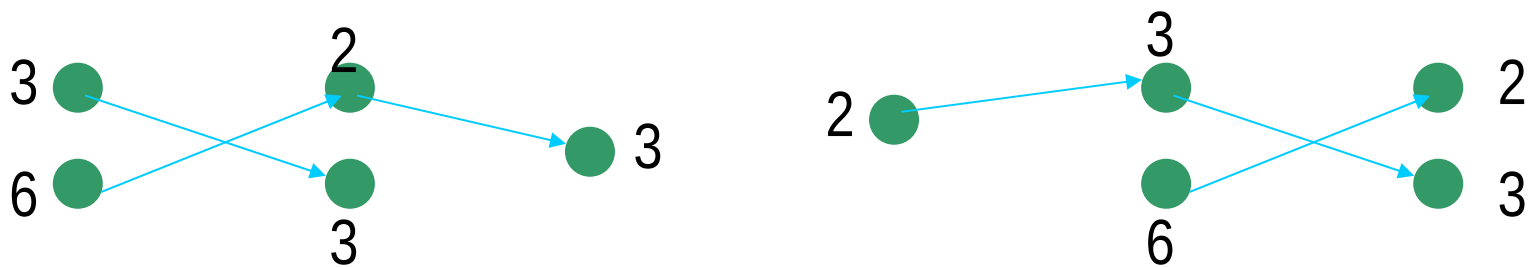
- 定义：设 R 为二元关系， R 的逆关系，简称 R 的逆，记作 R^{-1} ，其中 $R^{-1}=\{<x,y>|<y,x>\in R\}$
- 根据关系三种表示求关系的逆
 - 第一元素和第二元素换位
 - 求矩阵转置
 - 将关系图中的有向边反向
- 例：求 R^{-1} 和 S^{-1} ，其中 $R=\{<a,a>, <a,b>, <b,a>, <b,c>\}$ ， $S=\{<a,b>, <a,c>, <b,c>\}$ 。

逆运算的性质

- 定理：设 F 是任意的关系，则
 - (1) $(F^{-1})^{-1} = F$
 - (2) $\text{dom} F^{-1} = \text{ran} F$, $\text{ran} F^{-1} = \text{dom} F$
- 证明：根据定义直接证明

关系的复合（合成）

- 定义：设 R, S 为二元关系， R 与 S 的右复合记作 $R \circ S$ ， $R \circ S = \{ \langle x, z \rangle \mid \exists y (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in S) \}$
- 例：设 $R = \{ \langle 3, 3 \rangle, \langle 6, 2 \rangle \}$, $S = \{ \langle 2, 3 \rangle \}$ ，则
 $R \circ S = \{ \langle 6, 3 \rangle \}$ ， $S \circ R = \{ \langle 2, 3 \rangle \}$



- 类似的也可以定义关系的左复合，本课程在提到关系的复合时是指关系的右复合。

求关系的复合

- 关系矩阵的乘法，其中加法使用逻辑 $\vee$ ，乘法使用逻辑 $\wedge$ 。
- 在 R 的关系图后接上 S 的关系图，找出长为2的路径。

- 例：求 R^{-1} 、 S^{-1} 、 $R \circ S$ 和 $S \circ R$ ，其中
 $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$,
 $S = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$ 。

- 例：求 R^{-1} 、 S^{-1} 、 $R \circ S$ 和 $S \circ R$ ，其中
 $R = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle \}$,
 $S = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle \}$ 。

复合运算的 性质

- 定理：设 F , G , H 是任意的关系，则
$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$
- 定理：设 F , G 是任意的关系，则
$$(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$$
- 定理：设 R 为 A 上的关系，则
$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

目录

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示
- 关系的基本运算
- 关系的幂运算

关系的幂

- 设 R 为 A 上的关系， n 为自然数，则 R 的 n 次幂定义为：
 - (1) $R^0 = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \} = I_A$
 - (2) $R^{n+1} = R^n \circ R$
- 由以上定义可知，对于 A 上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1^0 = R_2^0 = I_A$
也就是说， A 上任何关系的0次幂都相等，都等于 A 上的恒等关系 I_A 。
- 此外对于 A 上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$ ，因为 $R^1 = R^0 \circ R = I_A \circ R = R$

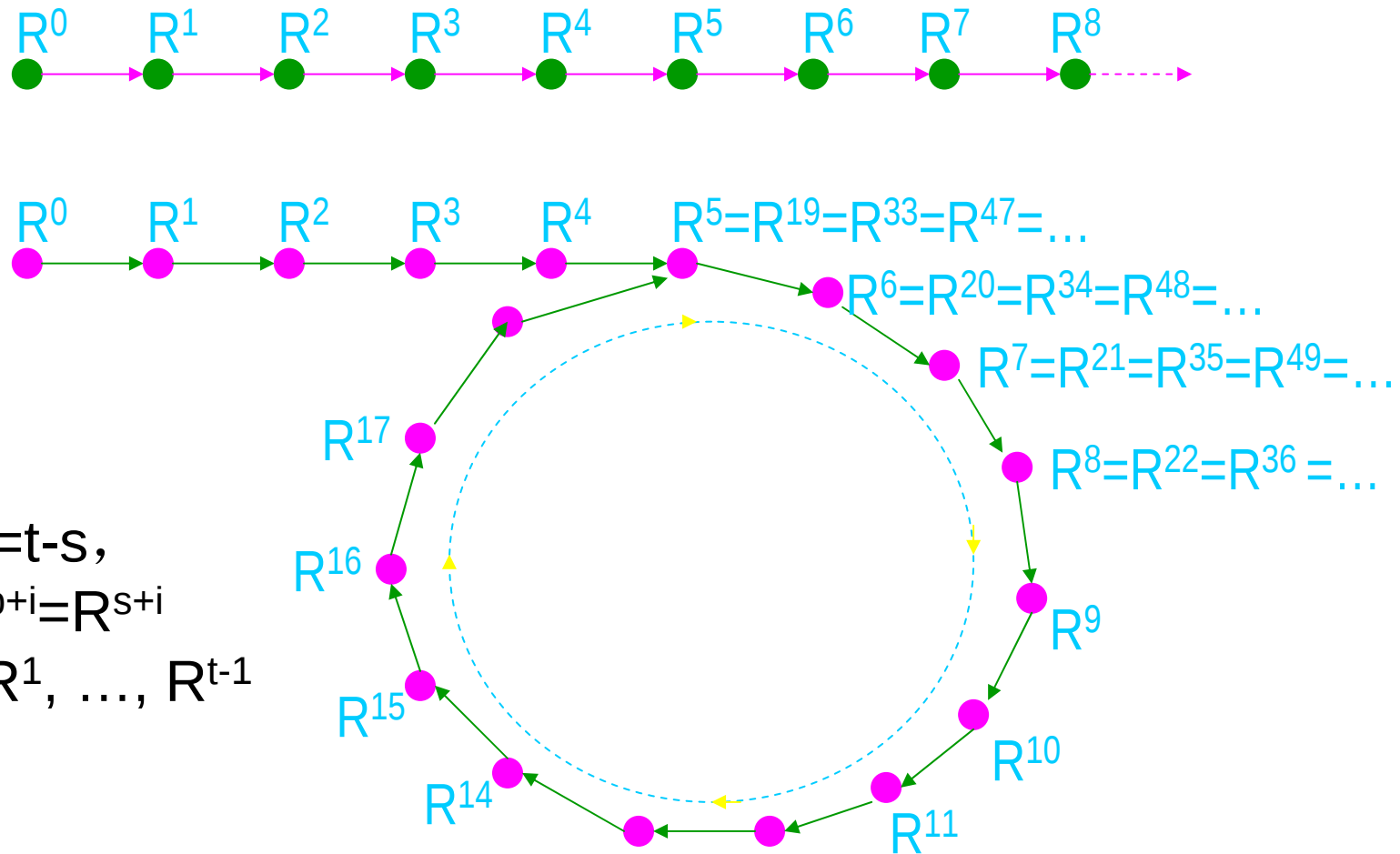
求关系的幂

- 如果 R 是用集合表达式给出的，可以通过 $n-1$ 次右复合计算得到 R^n 。
- 如果 R 是用关系矩阵 M 给出的，则 R^n 的关系矩阵是 M^n ，即 n 个矩阵 M 之积。
- 如果 R 是用关系图 G 给出的，可以直接由图 G 得到 R^n 的关系图 G' 。 G' 的顶点集与 G 相同。考察 G 的每个顶点 x_i ，如果在 G 中从 x_i 出发经过 n 步长的路径到达顶点 x_j ，则在 G' 中加一条从 x_i 到 x_j 的边。当把所有这样的边都找到以后，就得到图 G' 。
- 例：设 $A = \{a,b,c,d\}$ ， $R = \{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,d>\}$ ，求 R 的各次幂，分别用矩阵和关系图表示。

幂运算的性质

- 定理：设 A 为 n 元集， R 是 A 上的关系，则存在自然数 s 和 t ，使得 $R^s = R^t$ 。
 - 鸽巢原理
- 定理：设 R 是 A 上的关系， $m, n \in \mathbb{N}$ ，则
 - (1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
 - (2) $(R^m)^n = R^{mn}$
 - 对任意给定的 $m \in \mathbb{N}$ ，施归纳于 n
- 定理：设 R 是 A 上的关系，若存在自然数 $s, t (s < t)$ 使得 $R^s = R^t$ ，则
 - (1) 对任何 $k \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$
 - (2) 对任何 $k, i \in \mathbb{N}$ 有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$ ，其中 $p = t-s$
 - (3) 令 $S = \{R^0, R^1, \dots, R^{t-1}\}$ ，则对于任意的 $q \in \mathbb{N}$ 有 $R^q \in S$

$R^0, R^1, R^2, R^3, \dots$ 是一个周期性变化的序列



周期是 $p=t-s$,
 $R^n = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$
 值域 $R^0, R^1, \dots, R^{t-1}$

例题

- 例：设 $A=\{a,b,d,e,f\}$, $R=\{<a,b>, <b,a>, <d,e>, <e,f>, <f,d>\}$ 。求出最小的自然数 m 和 n , 使得 $m < n$ 且 $R^m = R^n$ 。
 - 对于 a 或 b , 每个元素的变化周期是 2。对于 d, e, f , 每个元素的变化周期是 3。因此必有 $R^m = R^{m+6}$, 其中 6 是 2 和 3 的最小公倍数。取 $m=0, n=6$ 即满足题目要求。
- 例：设 $R \subseteq A \times A$, 化简 R^{100} 的指数. 已知
(1) $R^7 = R^{15}$; (2) $R^3 = R^5$; (3) $R^1 = R^3$.
 - (1) $R^{100} = R^{7+11 \times 8+5} = R^{7+5} = R^{12} \in \{R^0, R^1, \dots, R^{14}\}$;
 - (2) $R^{100} = R^{3+48 \times 2+1} = R^{3+1} = R^4 \in \{R^0, R^1, \dots, R^4\}$;
 - (3) $R^{100} = R^{1+49 \times 2+1} = R^{1+1} = R^2 \in \{R^0, R^1, R^2\}$.