集合论与图论01

集合及其运算

何英华

hyh@tju.edu.cn

目录

集合与元素

- 集合是由确定的对象构成的集体
  - 一个对象要么属于这个集合，要么不属于这个集合
  - 用大写英文字母A,B,C,...表示集合
- 集合中的对象称为元素
  - 用小写英文字母a,b,c,...表示元素
- 用∈表示元素与集合的属于关系
  - a∈A：表示a是A的元素，读作“a属于A”
  - a∉A：表示a不是A的元素，读作“a不属于A”

集合的表示

- 列举法：列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来，例如
  - A={a,b,c,d,…,x,y,z}
  - B={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
  - C={书，办公桌，门，黑板}
  - D={北京，地球，宇宙}

集合的表示

- 描述法：用谓词P(x)表示x具有性质P ，用{x|P(x)}表示具有性质 P 的集合，例如
  - A={x|P_1 (x)}={x| x是英文字母}={a,b,c,d,…,x,y,z}
  - B={x|P_2(x)}= {x|x是十进制数字}={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

集合及其表示的注意事项

- 集合中的元素各不相同：{1,2,3,4}={1,1,2,3,4}
- 集合中的元素不规定次序：{a,b,c}={b,c,a}
- 许多集合可以用两种方法来表示，如B＝{-1，1}={x|x∈**R**∧x^2－1＝0}。但是有些集合不可以用列元素法表示，如实数集合。
- 集合中的元素也可以是集合：{1}∈{{1}，2}，1∉{{1}，2}

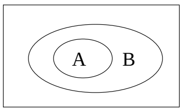
- 常用的集合符号：
  N={x|x为自然数}={0,1,2,…}
  Z={x|x为整数}={…,-2,-1,0,1,2,…}
  Q={x|x为有理数}
  R={x|x为实数}
  C={x|x为复数}

目录

- 集合及其表示法
- 集合之间的包含和相等
- 集合的幂集
- 集合的运算
- 基本集合恒等式

子集

- 设A，B为集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A是B的子集合，简称**子集**。这时也称A**被B包含**，或**B包含A**，记作A⊆B。如果A不被B包含，则记作A⊈B。
  - A={a,b,c}, B={a,b,c,d}, C={a,c}



文氏图：集合的包含关系

- 子集关系的性质
  - 自反性，A⊆A。
  - 反对称性，A⊆B且 B⊆A，则A=B。
  - 传递性，A⊆B且 B⊆C，则A⊆C。

相等

- 设A，B为集合，如果A⊆B，并且B⊆A，则称A和B相等，记做A=B。
  - $A=\{x|x\in \mathbf{R}\wedge x^2+x-6=0\}$
  - $B=\{x|x\in \mathbf{R}\wedge x^3+3x^2-4x-12=0\}$
  - C={-3,2}
- 相等关系的性质
  - 自反性：A=A
  - 对称性：A=B，则B=A
  - 传递性： A=B， B=C，则A=C

真子集

- 设A，B为集合，如果A⊆B并且A≠B，则称A是B的真子集，记作A⊂B。如果A不是B的真子集，则记作A⊄B。
  - A={a,b,c}, B={a,b,c,d}, C={a,c}
  - N ⊂Z ⊂Q ⊂R
- 真子集关系的性质
  - 反自反性：A⊄A
  - 传递性： A⊂B， B⊂C，则A⊂C

空集

- 没有任何元素的集合是空集,记作∅
  - {x|x≠x}
- 定理：对任意集合A, ∅⊆A
  - 反证法
- 推论: 空集是唯一的
  - $\varnothing_1 = \varnothing_2$

全集

- 如果限定所讨论的集合都是某个集合的子集，则称这个集合是全集，记作E

全集E

- 全集是相对的，视情况而定，因此不唯一。
  - 例如, 讨论(a,b)区间里的实数性质时, 可以选E=(a,b)，E=[a,b)，E=(a,b]，E=[a,b]，E=(a,+∞)，E=(-∞,+∞)等

练习题

设A={a,{a},{a,b},{{a,b},c}}，下面那些说法正确？

(1) $\{a\}\in A$	(2) $\{c\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$
(3) $c\in A$	(4) $\{a\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$
(5) $\{\{a\}\}\subseteq A$	(6) $\{a,b\}\in\{\{a,b\},c\}$
(7) $\{\{a,b\}\}\subseteq A$	(8) $\{a,b\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$

目录

- 集合及其表示法
- 集合之间的包含和相等
- 集合的幂集
- 集合的运算
- 基本集合恒等式

幂集

- A的全体子集组成的集合，称为A的幂集，记作P(A)，即$P(A)=\{x|x\subseteq A\}$
  - A={a,b}，$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$
  - 注意: $x\in P(A) \Leftrightarrow x\subseteq A$

求幂集

- A={a,b,c},P(A)=?
  - 000 $\Rightarrow \varnothing$
  - 001 $\Rightarrow$ {c}
  - 010 $\Rightarrow$ {b}
  - 011 $\Rightarrow$ {b,c}
  - 100 $\Rightarrow$ {a}
  - 101 $\Rightarrow$ {a,c}
  - 110 $\Rightarrow$ {a,b}
  - 111 $\Rightarrow$ {a,b,c}

- 称元素个数有限的集合为有限集，元素个数无限的集合为无限集；
- 称含有n个元素的集合为**n元集**；
- 使用|A|表示A中元素的个数。

- 定理：设|A|=n，则|P(A)|=2^n
  - 数学归纳法

练习题

设A={Φ}， B=P(P(A))，判断一下说法哪些正确

1) Φ∈B　　2) Φ⊆B

3) {Φ}∈B　　3) {Φ}⊆B

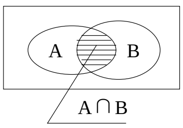
5) {{Φ}}∈B　　4) {{Φ}}⊆B

目录

- 集合及其表示法
- 集合之间的包含和相等
- 集合的幂集
- 集合的运算 ∩∪-~⊕
- 基本集合恒等式

交运算∩

- A、B是集合，由既属于A，也属于B的元素构成的集合，称之为A与B的交集，记作A∩B。
  - 例如A={1,2,3}，B={2,3,4}，A∩B={2,3}



- 如果A∩B=Φ，则称A与B不相交。

交运算的性质

(1)幂等律　A∩A=A
(2)交换律　A∩B=B∩A
(3)结合律　(A∩B)∩C=A∩(B∩C)
(4)同一律　A∩E=A
(5)零律　　A∩Φ=Φ
(6) A⊆B ⇔ A∩B=A

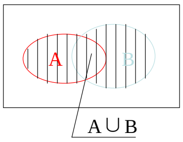
多个集合的交集

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

并运算∪

- A、B是集合，由或属于A，或属于B的元素构成的集合 ,称之为A与B的并集,记作A∪B。
  - 例如A={1,2,3}，B={2,3,4}，A∪B={1,2,3,4}



并运算的性质

(1)幂等律 A∪A=A
(2)交换律 A∪B=B∪A
(3)结合律 (A∪B)∪C=A∪(B∪C)
(4)同一律 A∪Φ=A
(5)零律 A∪E =E
(6)分配律 A∩(B∪C) =(A∩B)∪(A∩C)
A∪(B∩C) =(A∪B)∩(A∪C)
(7)吸收律 A∪(A∩B)=A
A∩(A∪B) =A
(8)A⊆B ⇔ A∪B=B

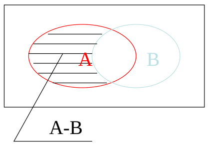
多个集合的并集

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

差运算- (相对补集)

- A、B是集合，由属于A，而不属于B的元素构成的集合 ,称之为A与B的差集,或B对A的相对补集，记作A-B。
  - 例如A={1,2,3} B={2,3,4}，A-B={1}

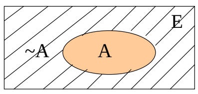


差运算的性质

(1)A-Φ=A
(2)Φ-A=Φ
(3)A-A=Φ
(4) A-B⊆A
(5)A⊆B ⇔ A-B=Φ
(6)(A-B)-C=(A-C)-(B-C)
(7)德摩根律 A-(B∩C)=(A-B)∪(A-C)
(8)德摩根律 A-(B∪C)=(A-B)∩(A-C)
(9)A∩(B-C)=(A∩B)-(A∩C)

补运算 ~ (绝对补集)

- A是集合,由不属于A的元素构成的集合，称之为A的绝对补集,记作~A。实际上~A=E-A。
  - 例如，E={1,2,3,4}，A={2,3},~A={1,4}

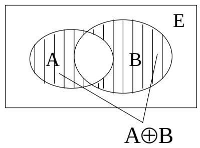


补运算的性质

⑴余补律 $\sim E=\Phi$
⑵余补律 $\sim\Phi=E$
⑶双重否定律 $\sim(\sim A)=A$
⑷矛盾律 $A\cap\sim A=\Phi$
⑸ 排中律 $A\cup\sim A=E$
⑹补交转换律 $A-B=A\cap\sim B$
⑺德摩根律 $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$
⑻德摩根律 $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$
⑼$A\subseteq B \Leftrightarrow \sim B\subseteq\sim A$
⑽ $\sim A=B$ 当且仅当$A\cup B=E$且 $A\cap B=\Phi$

对称差运算⊕

- A、B是集合,由属于A而不属于B，或者属于B而不属于A的元素构成的集合,称之为A与B的对称差,记作$A\oplus B$。
  - 例如$A=\{1,2,3\}$ $B=\{2,3,4\}$，$A\oplus B=\{1,4\}$



对称差运算的性质

⑴ 交换律 $A\oplus B=B\oplus A$
⑵ 结合律 $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$
⑶ $A\oplus\Phi=A$
⑷ $A\oplus E=\sim A$
⑸ $A\oplus A=\Phi$
⑹ $A\oplus\sim A=E$
⑺ ∩对⊕可分配 $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

目录

- 集合及其表示法
- 集合之间的包含和相等
- 集合的幂集
- 集合的运算
- 基本集合恒等式

基本集合恒等式

⑴幂等律	$A\cup A=A$
⑵交换律	$A\cup B=B\cup A$
⑶结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
⑷分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
⑸德摩根律	$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$
⑹吸收律	$A\cup(A\cap B)=A$
⑺零律	$A\cup E=E$
⑻同一律	$A\cup\Phi=A$
⑼排中律	$A\cup\sim A=E$
⑽矛盾律	$A\cap\sim A=\Phi$
⑾余补律	$\sim\Phi=E$
⑿双重否定律	$\sim(\sim A)=A$
⒀补交转换律	$A-B=A\cap\sim B$

恒等式的证明

- 证明$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$
- 证明方法一
  $x\in A-(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cup C)$
  $\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C) \Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)$
  $\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C) \Leftrightarrow x\in A-B\wedge x\in A-C$
  $\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$
- 证明方法二
  $A-(B\cup C)=A\cap\sim(B\cup C)=A\cap(\sim B\cap\sim C)=(A\cap A)\cap(\sim B\cap\sim C)$
  $=(A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)=(A-B)\cap(A-C)$

恒等式的证明

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

作业

- 1.5
- 1.6
- 1.11
- 1.12
- 1.26
- 1.29