集合论与图论01

集合及其运算

何英华

hyh@tju.edu.cn

目录

集合与元素

- 集合是由确定的对象构成的集体
  - 一个对象要么属于这个集合，要么不属于这个集合
  - 用大写英文字母A,B,C,…表示集合

- 集合中的对象称为元素
  - 用小写英文字母a,b,c,…表示元素

- 用∈表示元素与集合的属于关系
  - $a \in A$：表示a是A的元素，读作“a属于A”
  - $a \notin A$：表示a不是A的元素，读作“a不属于A”

集合的表示

- 列举法：列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来，例如
  - A={a,b,c,d,…,x,y,z}
  - B={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
  - C={书，办公桌，门，黑板}
  - D={北京，地球，宇宙}

集合的表示

- 描述法：用谓词P(x)表示x具有性质P ，用{x|P(x)}表示具有性质 P 的集合，例如
  - A={x|P_1 (x)}={x| x是英文字母}={a,b,c,d,…,x,y,z}
  - B={x|P_2(x)}= {x|x是十进制数字}
={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

集合及其表示的注意事项

- 集合中的元素各不相同：{1,2,3,4}={1,1,2,3,4}
- 集合中的元素不规定次序：{a,b,c}={b,c,a}
- 许多集合可以用两种方法来表示，如B＝{-1，1}=$\{x|x\in \mathbf{R}\wedge x^2-1=0\}$。但是有些集合不可以用列元素法表示，如实数集合。
- 集合中的元素也可以是集合：$\{1\}\in\{\{1\},2\}$，$1\notin\{\{1\},2\}$

- 常用的集合符号：

  $N=\{x|x为自然数\}=\{0,1,2,\ldots\}$

  $Z=\{x|x为整数\}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

  $Q=\{x|x为有理数\}$

  $R=\{x|x为实数\}$

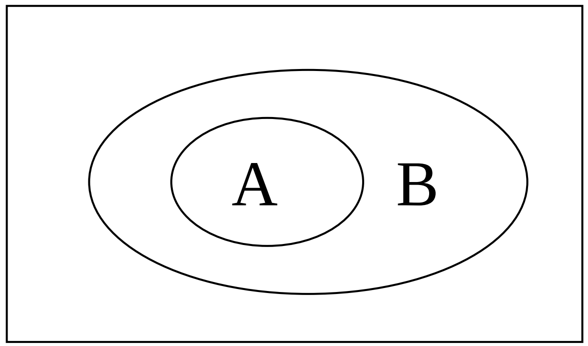
  $C=\{x|x为复数\}$

目录

- 集合及其表示法
- 集合之间的包含和相等
- 集合的幂集
- 集合的运算
- 基本集合恒等式

子集

- 设A，B为集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A是B的子集合，简称**子集**。这时也称A被B**包含**，或B**包含A**，记作$A \subseteq B$。如果A不被B包含，则记作$A \not\subseteq B$。
  - A={a,b,c}, B={a,b,c,d}, C={a,c}



文氏图：集合的包含关系

- 子集关系的性质
  - 自反性，$A \subseteq A$。
  - 反对称性，$A \subseteq B$且 $B \subseteq A$ ，则$A=B$。
  - 传递性，$A \subseteq B$且 $B \subseteq C$ ，则$A \subseteq C$。

相等

- 设A，B为集合，如果A$\subseteq$B，并且B$\subseteq$A，则称A和B相等，记做A=B。
  - A＝$\{x|x\in \mathbf{R} \wedge x^2+x-6=0\}$
  - B＝$\{x|x\in \mathbf{R} \wedge x^3+3x^2-4x-12=0\}$
  - C＝{-3,2}

- 相等关系的性质
  - 自反性：A=A
  - 对称性：A=B，则B=A
  - 传递性： A=B， B=C，则A=C

真子集

- 设A，B为集合，如果A$\subseteq$B并且A$\neq$B，则称A是B的真子集，记作A$\subset$B。如果A不是B的真子集，则记作A$\not\subset$B。
  - A={a,b,c}, B={a,b,c,d}, C={a,c}
  - N $\subset$Z $\subset$Q $\subset$R

- 真子集关系的性质
  - 反自反性：A$\not\subset$A
  - 传递性： A$\subset$B， B$\subset$C，则A$\subset$C

空集

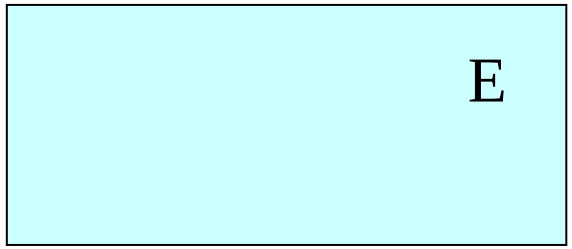
- 没有任何元素的集合是空集,记作$\varnothing$
  - $\{x|x\neq x\}$

- 定理: 对任意集合A, $\varnothing\subseteq A$
  - 反证法

- 推论: 空集是唯一的
  - $\varnothing_1 = \varnothing_2$

全集

- 如果限定所讨论的集合都是某个集合的子集，则称这个集合是全集，记作E



全集E

- 全集是相对的，视情况而定，因此不唯一。
  - 例如, 讨论(a,b)区间里的实数性质时, 可以选E=(a,b)，E=[a,b)，E=(a,b]，E=[a,b]，E=(a,+∞)，E=(-∞,+∞)等

练习题

设$A=\{a,\{a\},\{a,b\},\{\{a,b\},c\}\}$，下面那些说法正确？

(1) $\{a\}\in A$　　(2) $\{c\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$

(3) $c\in A$　　(4) $\{a\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$

(5) $\{\{a\}\}\subseteq A$　　(6) $\{a,b\}\in\{\{a,b\},c\}$

(7) $\{\{a,b\}\}\subseteq A$　　(8) $\{a,b\}\subseteq\{\{a,b\},c\}$

目录

- 集合及其表示法
- 集合之间的包含和相等
- 集合的幂集
- 集合的运算
- 基本集合恒等式

幂集

- A的全体子集组成的集合，称为A的幂集，记作P(A)，即$P(A)=\{x|x\subseteq A\}$
  - $A=\{a,b\}$，$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$
  - 注意: $x\in P(A) \Leftrightarrow x\subseteq A$

求幂集

- A={a,b,c},P(A)=?
  - 000 $\Rightarrow \varnothing$
  - 001 $\Rightarrow$ {c}
  - 010 $\Rightarrow$ {b}
  - 011 $\Rightarrow$ {b,c}
  - 100 $\Rightarrow$ {a}
  - 101 $\Rightarrow$ {a,c}
  - 110 $\Rightarrow$ {a,b}
  - 111 $\Rightarrow$ {a,b,c}

- 称元素个数有限的集合为有限集，
  元素个数无限的集合为无限集；
- 称含有n个元素的集合为**n**元集；
- 使用|A|表示A中元素的个数。

- 定理：设$|A|=n$，则$|P(A)|=2^n$
  - 数学归纳法

练习题

设A={Φ}， B=P(P(A))，判断一下说法哪些正确

1) $\Phi \in B$　　2) $\Phi \subseteq B$

3) $\{\Phi\} \in B$　　3) $\{\Phi\} \subseteq B$

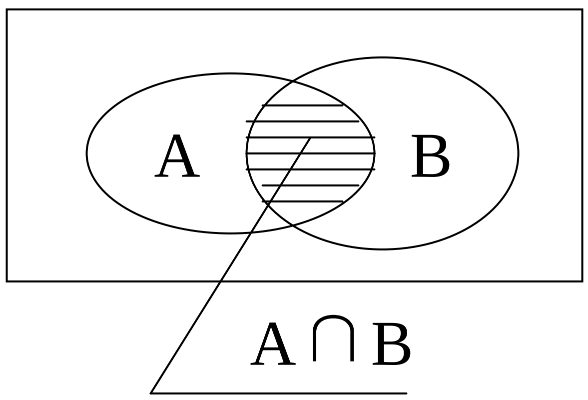
5) $\{\{\Phi\}\} \in B$　　4) $\{\{\Phi\}\} \subseteq B$

目录

- 集合及其表示法
- 集合之间的包含和相等
- 集合的幂集
- 集合的运算 ∩ ∪ - ~ ⊕
- 基本集合恒等式

交运算∩

- A、B是集合，由既属于A，也属于B的元素构成的集合 ,称之为A与B的交集,记作A∩B。
  - 例如A={1,2,3}，B={2,3,4}，A∩B={2,3}



- 如果A∩B=Φ，则称A与B不相交。

交运算的性质

(1)幂等律 $A \cap A = A$

(2)交换律 $A \cap B = B \cap A$

(3)结合律 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(4)同一律 $A \cap E = A$

(5)零律 $A \cap \Phi = \Phi$

(6) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

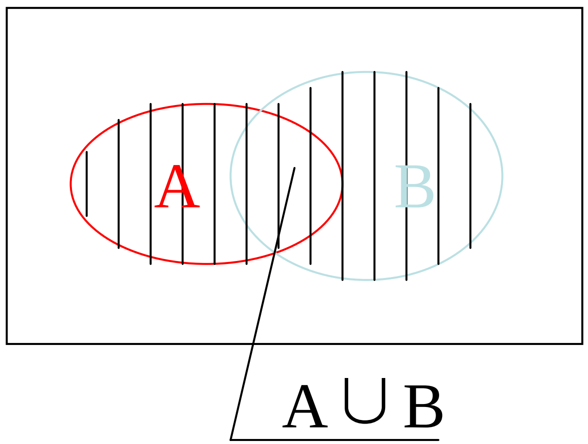
多个集合的交集

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

并运算∪

- A、B是集合，由或属于A，或属于B的元素构成的集合 ,称之为A与B的并集,记作A∪B。
  - 例如A={1,2,3}，B={2,3,4}，A∪B={1,2,3,4}



并运算的性质

(1)幂等律 $A \cup A = A$

(2)交换律 $A \cup B = B \cup A$

(3)结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(4)同一律 $A \cup \Phi = A$

(5)零律 $A \cup E = E$

(6)分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(7)吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

(8)$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

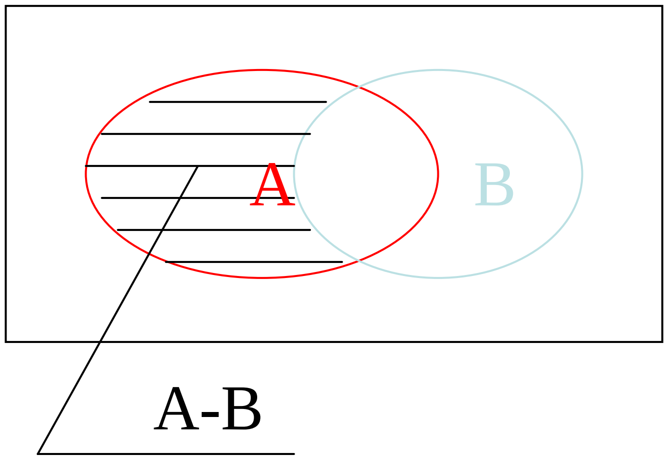
多个集合的并集

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

差运算- (相对补集)

- A、B是集合， 由属于A，而不属于B的元素构成的集合 ,称之为A与B的差集,或B对A的相对补集， 记作A-B。
  - 例如A={1,2,3} B={2,3,4}，A-B={1}



差运算的性质

(1) $A-\Phi=A$

(2) $\Phi-A=\Phi$

(3) $A-A=\Phi$

(4) $A-B\subseteq A$

(5) $A\subseteq B \Leftrightarrow A-B=\Phi$

(6) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$

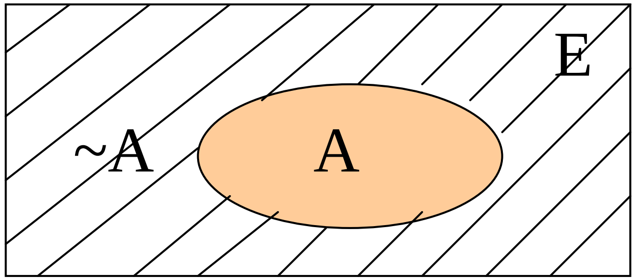
(7) 德摩根律 $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

(8) 德摩根律 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

(9) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

补运算 ~ (绝对补集)

- A是集合,由不属于A的元素构成的集合，称之为A的绝对补集,记作~A。实际上~A=E-A。
  - 例如，E={1,2,3,4}，A={2,3},~A={1,4}



补运算的性质

⑴余补律 $\sim E=\Phi$

⑵余补律 $\sim\Phi=E$

⑶双重否定律 $\sim(\sim A)=A$

⑷矛盾律 $A\cap\sim A=\Phi$

⑸ 排中律 $A\cup\sim A=E$

⑹补交转换律 $A-B=A\cap\sim B$

⑺德摩根律 $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

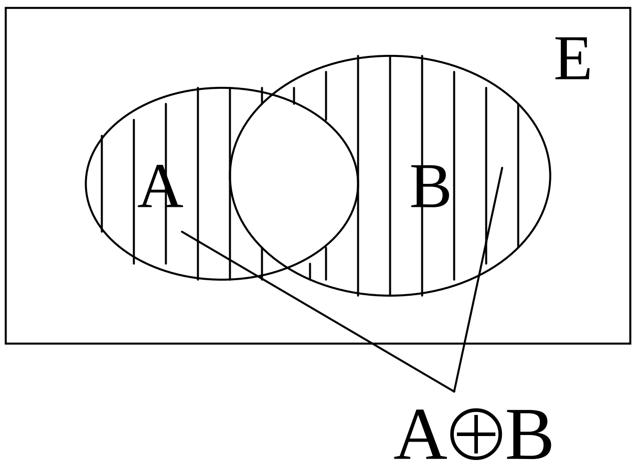
⑻德摩根律 $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$

⑼$A\subseteq B \Leftrightarrow \sim B\subseteq\sim A$

⑽ $\sim A=B$ 当且仅当$A\cup B=E$且 $A\cap B=\Phi$

对称差运算⊕

- A、B是集合,由属于A而不属于B，或者属于B而不属于A的元素构成的集合,称之为A与B的对称差,记作A⊕B。
  – 例如A={1,2,3} B={2,3,4}，A⊕B={1,4}



对称差运算的性质

(1) 交换律 $A \oplus B = B \oplus A$

(2) 结合律 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

(3) $A \oplus \Phi = A$

(4) $A \oplus E = \sim A$

(5) $A \oplus A = \Phi$

(6) $A \oplus \sim A = E$

(7) $\cap$对$\oplus$可分配 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

目录

- 集合及其表示法
- 集合之间的包含和相等
- 集合的幂集
- 集合的运算
- 基本集合恒等式

基本集合恒等式

⑴幂等律 $A \cup A = A$

⑵交换律 $A \cup B = B \cup A$

⑶结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

⑷分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

⑸德摩根律 $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

⑹吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$

⑺零律 $A \cup E = E$

⑻同一律 $A \cup \Phi = A$

⑼排中律 $A \cup \sim A = E$

⑽矛盾律 $A \cap \sim A = \Phi$

⑾余补律 $\sim \Phi = E$

⑿双重否定律 $\sim(\sim A) = A$

⒀补交转换律 $A - B = A \cap \sim B$

恒等式的证明

- 证明$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

- 证明方法一

  $x\in A-(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin(B\cup C)$

  $\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C) \Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)$

  $\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C) \Leftrightarrow x\in A-B\wedge x\in A-C$

  $\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$

- 证明方法二

  $A-(B\cup C)=A\cap\sim(B\cup C)= A\cap(\sim B\cap\sim C)=(A\cap A)\cap(\sim B\cap\sim C)$

  $=(A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)=(A-B)\cap(A-C)$

恒等式的证明

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

作业

- 1.5
- 1.6
- 1.11
- 1.12
- 1.26
- 1.29