第 8 讲 组合设计

何英华
天津大学计算机科学与技术学院
（hyh@tju.edu.cn，http://202.113.12.9/~hyh）

1 引言

３６军官问题是一个著名的组合学问题，是在１８世纪由瑞士著名数学家欧拉提出的。这个问题是这样的：设有 6 种军衔和来自 6 个团的３６名军官，能不能把他们排成 6 行 6 列的队列，使得每行每列里都有每种军衔的一名军官和每个团的一名军官？

三十六军官问题提出后，很长一段时间没有得到解决，直到 20 世纪初才被证明这样的方队是排不起来的。尽管很容易将三十六军官问题中的军团数和军阶数推广到一般的 n 的情况，而相应的满足条件的方队被称为 n 阶欧拉方。

欧拉曾猜测：对任何非负整数 t，n=4t+2 阶欧拉方都不存在。t=1 时，这就是三十六军官问题，

而 t=2 时，n=10，数学家们构造出了 10 阶欧拉方，这说明欧拉猜想不对。

但到 1960 年，数学家们彻底解决了这个问题，证明了 n=4t+2(t≥2)阶欧拉方都是存在的。

问题：某寄宿学校有十五名女生，她们经常每天三人一组地散步，问要怎样安排才能使每个女生同其他每个女生同一组中散步，并恰好每周一次。

设计出符合要求的试验方案，通常称之为“试验设计”或“区组设计”。

2 拉丁方

2.1 拉丁方与正交拉丁方

[定义 1] 由 1，2，…，n 构成的$n \times n$方阵

$$\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$$

要求每行及每列 1，2，…，n 各出现一次。这样的方阵称为拉丁方。

[定义 2] 设$A_1=\left(a_{ij}^{(1)}\right)_{n\times n}$，$A_2=\left(a_{ij}^{(2)}\right)_{n\times n}$是两个$n \times n$的拉丁方。若矩阵

$$\left(\left(a_{ij}^{(1)},a_{ij}^{(2)}\right)\right)_{n\times n}$$

中的n^2个数偶$\left(a_{ij}^{(1)},a_{ij}^{(2)}\right)$互不相同，i，j=1，2，…，n，则称$A_1$和$A_2$正交，或$A_1$和$A_2$是互相正交的拉丁方。

2.2 正交拉丁方的性质

设$n\times n$的拉丁方的阶为 n，记 n 阶拉丁方的项为 1，2，…，n。n 阶拉丁方究竟有多少两两正交的拉丁方族?

1 阶的拉丁方只有 1 个。2 阶的拉丁方不存在正交的拉丁方族。因为 2 阶的拉丁方只有两个，

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

它们不正交。

[定理 1] 若存在 r 个正交的拉丁方族，则

$$r\le n-1$$

证明：设 A1，A2，。。。，Ar 为 n 阶正交拉丁方族。令

$$A_k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$$

即 Ak 的第 i 行，第 j 列元素为$a_{ij}^{(k)}$。

重新对 A1 各项以新的标记，令$a_{11}^{(1)}=1$，若$a_{11}^{(1)}=k$，则作置换(1 k)。即令 A1 中的 1 和 k 互换，这并不改变 A1 作为拉丁方的性质，也不改变它与其他拉丁方构成正交性。

类似的，使各个拉丁方的$a_{11}^{(h)}$都改为 1，也不影响它们是一个正交拉丁方族，依次类推，一般可假定

$$a_{11}^{(1)}=a_{11}^{(2)}=\cdots=a_{11}^{(r)}=1$$

$$a_{12}^{(1)}=a_{12}^{(2)}=\cdots=a_{12}^{(r)}=1$$

……

$$a_{1n}^{(1)}=a_{1n}^{(2)}=\cdots=a_{1n}^{(r)}=1$$

即 Ah 的第 1 行全部规范化为相同的形式：

1 2 3 。。。n，h=1，2，…，r

下面，对$a_{21}^{(h)}$进行考察，因为每列不可能出现两个 1，故$a_{21}^{(h)}\ne 1$，h=1，2，…，r。而且当$h\ne k$时，

$$a_{21}^{(h)}\ne a_{21}^{(k)}$$

如若不然，则存在$1\le p\le n$，使

$(a_{21}^{(h)}, a_{21}^{(k)}) = (p, p)$

则

$(a_{21}^{(h)}, a_{21}^{(k)}) = (p, p) = (a_{1p}^{(h)}, a_{1p}^{(k)})$

与 A_h 和 A_k 正交的假设相矛盾。所以

$a_{21}^{(1)}, a_{21}^{(2)}, ..., a_{21}^{(r)}$

必定两两不相同，且都不等于 1。这就证明了最多有 n-1 个，或$r \le n-1$。所以，3 阶的拉丁方也只有一对是正交的。

下面 3 个 4 阶正交拉丁方规范化如下：

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{4\leftrightarrow 1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{4\leftrightarrow 1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\leftrightarrow 1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{4\leftrightarrow 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\leftrightarrow 3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\leftrightarrow 4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

[定理 2] $n = p^{\alpha}$，且$n \ge 3$，其中 p 是一个素数，α 是正整数，则存在 n-1 个互相正交的 n 阶的拉丁方。

由这个定理可以推断出存在两个 3 阶的正交拉丁方、3 个 4 阶的正交拉丁方，还可以推断存在 4 个 5 阶的正交拉丁方。

但是不能回答是否存在 6 阶的正交拉丁方的问题。

2.2 正交拉丁方的构造

[定理 3] 设

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

是 n（>1）的素数幂分解，

$$r = \min_j \left\{ p_j^{\alpha_j} - 1 \right\}$$

则 n 阶拉丁方存在有 r 个正交拉丁方。

还是不能回答是否存在 6 阶的正交拉丁方的问题。1900 年这个问题才获得证明。不存在！

[定理 4] 设A_1，A_2，…，A_k是一组 n1 阶的正交拉丁方，B1，B2，…，Bk 是另一组 n2 阶的正交拉丁方。构造一组 k 个 n1n2 阶的矩阵如下：

$$C_r=\begin{bmatrix}(a_{11}^{(r)},B_r) & (a_{12}^{(r)},B_r) & \cdots & (a_{1n_1}^{(r)},B_r)\\ (a_{21}^{(r)},B_r) & (a_{22}^{(r)},B_r) & \cdots & (a_{2n_1}^{(r)},B_r)\\ . & . & . & .\\ (a_{n_11}^{(r)},B_r) & (a_{n_12}^{(r)},B_r) & \cdots & (a_{n_1n_1}^{(r)},B_r)\end{bmatrix}$$

其中$A_r=(a_{ij}^{(r)})_{n_1\times n_1}$，$(a_{ij}^{(r)},B_r)$ 是$n_2\times n_2$的矩阵，第 k 行 l 列元素为：

$$(a_{ij}^{(r)},b_{kl}^{(r)}),\text{k=1，2，…，n2；l=1，2，…,n2}$$

[定理 5] 由上式给出的设C_1，C_2，…，C_r是一组$(n_1n_2)\times(n_1n_2)$的正交式拉丁方。

[例 1]

$$A_1=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&3&2\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}3&1&2\\2&3&1\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}4&3&2&1\\3&4&1&2\\2&1&4&3\\1&2&3&4\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}4&2&1&3\\3&1&2&4\\2&4&3&1\\1&3&4&1\end{bmatrix}$$

即 A1，A2 是一对3×3的正交的拉丁方；B1，B2 是另一对4×4的正交拉丁方。从而可以构造一对12×12的正交拉丁方。

$$C_1=\begin{bmatrix}(3,B_1)&(2,B_1)&(1,B_1)\\(2,B_1)&(1,B_1)&(3,B_1)\\(1,B_1)&(3,B_1)&(2,B_1)\end{bmatrix}$$

$$C_2=\begin{bmatrix}(3,B_2)&(2,B_2)&(1,B_2)\\(2,B_2)&(1,B_2)&(3,B_2)\\(1,B_2)&(3,B_2)&(2,B_2)\end{bmatrix}$$

其中

$$(3,B_1)=\begin{bmatrix}(3,4)&(3,3)&(3,2)&(3,1)\\(3,3)&(3,4)&(3,1)&(3,2)\\(3,2)&(3,1)&(3,4)&(3,3)\\(3,1)&(3,2)&(3,3)&(3,4)\end{bmatrix}$$

$$(3,B_2)=\begin{bmatrix}(3,4) & (3,2) & (3,1) & (3,3)\\ (3,3) & (3,1) & (3,2) & (3,4)\\ (3,2) & (3,4) & (3,3) & (3,1)\\ (3,1) & (3,3) & (3,4) & (3,2)\end{bmatrix}$$

其余依次类推。

若分别对此 12 个数偶给以从 1 到 12 的标号，使得到两个12×12的拉丁方。

2 均衡不完全的区组设计(BIBD)

2.1 均衡不完全的区组设计

(b,v,r,k,λ) 设计。

设 $X=\{x_1,x_2,....,x_v\}$ 为实验对象集合，v 为实验对象的数目。

所谓均衡不完全的区组，指的是由 X 中的子集构成区组的集合，b 为区组的数目，即设为 $\{B_1,B_2,...,B_b\}$。每组有 X 的 k 个元素，并满足以下的条件：

(a)X 中的每一个元素在 b 组中正好出现 r 次；
(b)任意一对属于 X 的元素在 b 组中正好同时出现 λ 次；
(c)$k<v$。

满足以上条件的 BIBD 记以 (b,v,r,k,λ) -设计。

[例 2] $X=\{x_1,x_2,x_3,...,x_7\}$

$B_1:x_1,x_2,x_4$； $B_2:x_2,x_3,x_5$； $B_3:x_3,x_4,x_6$；

$B_4:x_4,x_5,x_7$； $B_5:x_5,x_6,x_1$； $B_6:x_6,x_7,x_2$；

$B_7:x_7,x_1,x_3$

为 $(7,7,3,3,1)$ -设计

[例 3] $X=\{x_1,x_2,x_3,...,x_9\}$

$B_1:x_1,x_2,x_3$； $B_2:x_4,x_5,x_6$； $B_3:x_7,x_8,x_9$；

$B_4:x_1,x_4,x_7$； $B_5:x_2,x_5,x_8$； $B_6:x_3,x_6,x_9$；

$B_7:x_1,x_5,x_9$； $B_8:x_2,x_6,x_7$； $B_9:x_3,x_4,x_8$；

$B_{10}:x_1,x_6,x_8$； $B_{11}:x_2,x_4,x_9$； $B_{12}:x_3,x_5,x_7$；

为 $(12,9,4,3,1)$ -设计

区组矩阵

区组设计可用其区组矩阵 $A=(a_{ij})_{v\times b}$ 来描述，即

$A=(a_{ij})$， $i=1,2,\ldots,v$； $j=1,2,\ldots,b$

其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & x_i\in B_j\\ 0, & x_i\notin B_j\end{cases}$$

如，例 3 的区组矩阵为：

$$A=\begin{array}{c}\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8\\ x_9\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccccc}B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 & B_9 & B_{10} & B_{11} & B_{12}\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}.$$

[定义 3]对称的 BIBD

当 b=v 时的 BIBD 称为是对称的。由于 bk=vr，故此时有 k=r。对称的 BIBD 可记为 (v,r,λ) -设计。

例如：

$B_1:x_1,x_2,x_4$； $B_2:x_2,x_3,x_5$； $B_3:x_3,x_4,x_6$；

$B_4:x_4,x_5,x_7$； $B_5:x_5,x_6,x_1$； $B_6:x_6,x_7,x_2$；

$B_7:x_7,x_1,x_3$

便是 $v=b=7$， $r=k=3$， $\lambda=1$

2.2 BIBD 的性质

[定理 6] (b,v,r,k,λ) -设计必须满足

$bk = vr$， $r(k-1) = \lambda(v-1)$

[定理 7] 对于 (b, v, r, k, λ) -设计，下列等式成立：

$AA^T = (r - \lambda)I + \lambda J$

其中 I 是 $v \times v$ 的单位矩阵，J 是所有元素均为 1 的 $v \times v$ 矩阵。

[定理 8] 在 (b, v, r, k, λ) -设计中， $b \geq v$ 恒成立。

[定理 9] 对称的 BIBD 的任意两组都正好有 λ 个共同的元素。

[定理 10] 若 B_1， B_2， …， B_v 是关于集合 $X = \{x_1, x_2, ..., x_v\}$ 的对称的 BIBD，则对于其中任一 B_i，下列 v-1 个区组

$$B_1 \setminus B_i，B_2 \setminus B_i，…，B_{i-1} \setminus B_i，B_{i+1} \setminus B_i，…，B_v \setminus B_i$$

构成一关于集合 $X \setminus B_i$ 的 BIBD。

[定理 11] 若 B_1， B_2， …， B_v 是关于集合 $X = \{x_1, x_2, ..., x_v\}$ 的对称的 BIBD， B_i 是其中任意一个，则

$$B_1 \cap B_i，B_2 \cap B_i，，…，B_{i-1} \cap B_i，B_{i+1} \cap B_i，…，B_v \cap B_i$$

构成一关于集合 B_i 的 BIBD。

3 Steiner 三元系

[定义 4]k=3 的区组设计称为三元系，对于

$$(b, v, r, 3, \lambda)\text{-设计}$$

存在的必要条件是

$$3b = rv，\ 2r = \lambda(v-1)$$

或改写为

$$r = \frac{\lambda(v-1)}{2}$$
$$b = \frac{\lambda v(v-1)}{6}$$

r 和 b 是整数，故

$$\lambda v(v-1) \equiv 0 \bmod 6$$

$$\lambda(v-1) \equiv 0 \bmod 2$$

$\lambda=1$的三元系称为 Steiner 三元系。

[科克曼定理 12]　v 个对象的 Steiner 三元系存在的必要条件是：

$$v=6n+1 \text{或} v=6n+3$$

[例]　$v=3$ 的 Steiner 三元系：$x_1x_2x_3$。

$v=7$ 的 Steiner 三元系：

$x_1x_2x_3$，$x_1x_4x_5$，$x_1x_6x_7$，

$x_2x_4x_6$，$x_2x_5x_7$，

$x_3x_4x_7$，$x_3x_5x_6$，

$v=9$ 的 Steiner 三元系：

$x_1x_2x_3$，$x_1x_4x_5$，$x_1x_6x_8$，$x_1x_7x_9$

$x_2x_4x_9$，$x_2x_5x_6$，$x_2x_7x_8$，

$x_3x_4x_8$，$x_3x_5x_7$，$x_3x_6x_9$，

$x_4x_6x_7$，$x_5x_8x_9$，

[定理 13]　设 S_1 是关于 $X=\{x_1,x_2,...,x_{v_1}\}$ 的 Steiner 三元系，S_2 是关于 $Y=\{y_1,y_2,...,y_{v_2}\}$ 的 Steiner 三元系，则存在一关于 v_1v_2 元素

$$z_{ij}；\ i=1,2,...,v_1；\quad j=1,2,...,v_2$$

的 Steiner 三元系。

[例]　$v_1=v_2=3$，S_1 只有一区组 $x_1x_2x_3$；S_2 只有一区组 $y_1y_2y_3$；构造 Steiner 三元系 S 如下：

(a)　$i=j=k=1$，有 z_{11}，z_{12}，z_{13}；$i=j=k=2$，对应有 z_{21}，z_{22}，z_{23}；$i=j=k=3$，对应有 z_{31}，z_{32}，z_{33}；

(b)　同理，$r=s=t=1$，2，3，分别有 z_{11}，z_{21}，z_{31}，z_{12}，z_{22}，z_{32}，z_{13}，z_{23}，z_{33}。

(c)　$(x_1,x_2,x_3)\in S_1$，$(y_1,y_2,y_3)\in S_2$

由于 1 2 3 的全排列有

1 2 3　　1 3 2　　2 1 3

2 3 1　　3 1 2　　3 2 1

故有区组

$$z_{11},z_{22},z_{33} \qquad z_{11},z_{23},z_{32} \qquad z_{12},z_{21},z_{33}$$

$$z_{12}, z_{23}, z_{31} \quad z_{13}, z_{21}, z_{32} \quad z_{13}, z_{22}, z_{31}$$

故关于 9 个元素 z_{ij}，i=1，2，3；j=1，2，3 共有 12 个区组的 Steiner 三元系。

问题：某寄宿学校有十五名女生，她们经常每天三人一组地散步，问要怎样安排才能使每个女生同其他每个女生同一组中散步，并恰好每周一次。

解：$7\times5=35$个三元组，使得每一对女生在三元组里正好出现一次。

可以将 35 个三元组分成 7 部分，每部分有 5 个三元组。每一个女生正好在每部分出现一次，即在一个三元组出现，即 Steiner 三元系

$\lambda=1$， $v=15$

$b=v(v-1)/b=35$

即科克曼女生问题为$\lambda=1$， $v=15$的 Steiner 三元系，它的解为

{1，2，3}，{4，8，12}，{5，10，15}，{6，11，13}，{7，9，14}，
{1，4，5}，{2，8，10}，{3，13，14}，{6，9，15}，{7，11，12}，
{1，6，7}，{2，9，11}，{3，12，15}，{4，10，14}，{5，8，13}，
{1，8，9}，{2，12，14}，{3，5，6}，{4，11，15}，{7，10，13}，
{1，10，11}，{2，13，15}，{3，4，7}，{5，9，12}，{6，8，14}，
{1，12，13}，{2，4，6}，{3，9，10}，{5，11，14}，{7，8，15}，
{1，14，15}，{2，5，7}，{3，8，11}，{4，9，13}，{6，10，12}

$\lambda=1$的 Steiner 三元系也称科克曼三元系。