第 7 讲 波利亚定理

1 引言

组合数学中的一个难点：

区分所讨论的问题中哪些应该看成是相同的，哪些是不同的；在计数的过程中避免重复和遗漏。一般要依据具体问题的要求确切地给出对象异同的数学定义。也就是说，在对象集合上定义一个等价关系，计数的对象是等价类，而不是元素本身。

例如：用红、黄两种颜色对正立方体的 6 个面进行着色，问有多少种不同的方案？

美国数学家 George Polya 于 1973 年建立了一个重要的定理（Polya 定理），把生成函数的思想、群的观点以及权的概念融为了一体，该定理成为组合数学的重要组成成分。

2 置换群

2.1 置换

置换的定义

[定义] 假定 n 个元素为 1,2,..,n，$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是这 n 个元素的一个排列，n 阶置换

$$p=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

表示用 a_i 取代 i $(1\leqslant i\leqslant n)$ ，或者说将 i 放置到 a_i。

[例] $p_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $p_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

置换的乘积运算

[定义] 如果 p_1,p_2 都是置换，则乘积 p_1p_2 定义为一种重新排列，即首先用 p_1 置换，然后对其结果用 p_2 置换。

[例]

$$p_1p_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&2&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

置换群

[定理] 令 S_n 表示所有的 n 阶置换的集合，则$|S_n|=n!$，且 S_n 是一个群。

S_n 称为 n 阶置换群或者 n 阶对称群

证明：1)封闭性。若 $p_1,p_2\in S_n$，$p_1p_2=p_3$，则 $p_3\in S_n$

2)结合律。若 $p_1,p_2,p3\in S_n$，则$(p_1p_2)p_3=p_1(p_2p_3)$

3)单位元。若 $p\in S_n$，则存在 $I\in S_n$ 使得 $Ip=pI=p$

$$I=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&3&\cdots&n\end{pmatrix}$$

4)逆元素。若 $p\in S_n$，则存在 $p^{-1}\in S_n$ 使得$(p^{-1})p=p(p^{-1})=I$

$$p=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\end{pmatrix}\quad p^{-1}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\1&2&3&\cdots&n\end{pmatrix}$$

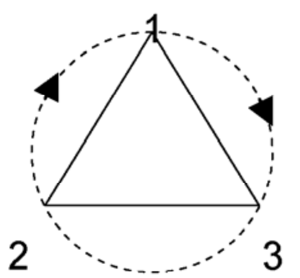
置换的乘积运算不满足交换律

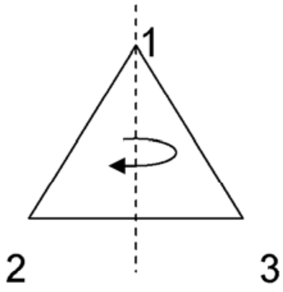
S_n 的性质

1. S_n 中单位元 I 是唯一的
2. 设 $a,b,c\in S_n$。若 $ab=ac$,则 $b=c$；若 $ba=ca$,则 $b=c$
3. S_n 中每一个元素的逆元是唯一的
4. $(abc\ldots lmn)^{-1}=n^{-1}m^{-1}l^{-1}\ldots c^{-1}b^{-1}a^{-1}$
5. 若 $a\in S_n$，则存在一个最小的常数 r 使得 $a^r=I$

S_3

[例] 用置换来表示等边三角形绕中心转动 0 度、120 度、240 度或者绕对称轴翻转 180 度（三个对称轴），得到 S_3





$$p_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\quad p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\quad p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$
$$p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\quad p_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\quad p_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

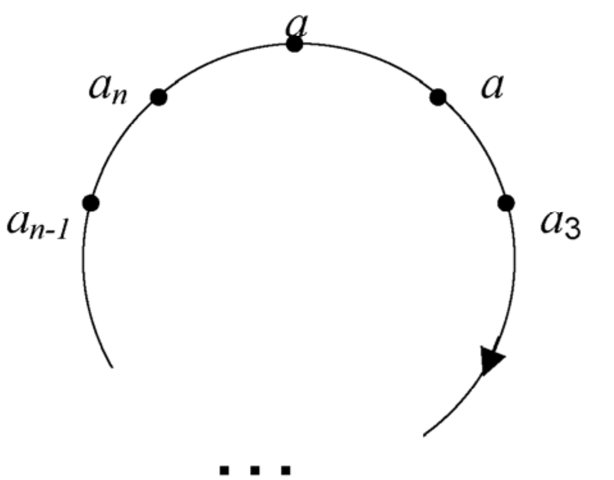
2.2 轮换

[定义] n-轮换($a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots \quad a_n$)定义为

$$(a_1 \ \ a_2 \ \ a_3 \ \ \cdots \ \ a_n)=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_2&a_3&a_4&\cdots&a_1\end{pmatrix}$$

[例] $(1\ \ 4\ \ 5\ \ 2\ \ 3)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&5&2\end{pmatrix}$

[定理] 若 p 是一个 n-轮换，则 $p^n=I$



不相交的轮换

[定义] 若两个轮换无公共元素，则称它们是不相交的。

[例] (1 3 2)和(4 5)是不相交的轮换。

[定理] 若 a,b 两个轮换是不相交的，则 $ab=ba$

[例] $(1\ \ 3\ \ 2)(4\ \ 5)=(4\ \ 5)(1\ \ 3\ \ 2)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}$

置换和轮换

[定理] 每个置换仅能以唯一的方式(不考虑因子的顺序）表示为不相交的轮换的乘积。

证明：对已知置换

$$p=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$$

从 1 开始搜索，如 $1\to a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_k \to 1$，则得一轮换

$$(1 \quad a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_k)$$

如该轮换包含了 $1,2,\ldots,n$，则搜索停止，否则从余下的元素中选择任意一个重复上述步骤再得一轮换。如此反复直到所有元素都取完为止。这样最终得到一个不相交的轮换的乘积。(唯一性证明略)

S_3 的轮换表示

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=(1)(2)(3)=I \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=(1 \quad 2 \quad 3)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=(1 \quad 3 \quad 2) \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=(1)(2 \quad 3)=(2 \quad 3)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=(2)(1 \quad 3)=(1 \quad 3) \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=(3)(1 \quad 2)=(1 \quad 2)$$

在表示一个置换时，1-轮换常被省略，如上所示。这时，可以看到 S_2 是 S_3 的子群

洗牌

[例] 编号为 1 到 52 的一副牌，对半分开成两堆，然后从两堆中各取一张交替放置。如果每次洗牌都保持顶部和底部的牌不变，如下图所示：

1			1
2	1	27	27
3	2	28	2
…	…	…	…
50	25	51	51
51	26	52	26
52			52

则可写出相应的置换 p，p 可以写成 2 个 1 阶轮换、1 个 2 阶轮换和 6 个 8 阶轮换的乘积，这也意味着 8 次洗牌即可恢复最初的顺序。

$$\begin{aligned}p=&(1)(2 \quad 27 \quad 14 \quad 33 \quad 17 \quad 9 \quad 5 \quad 3)(4 \quad 28 \quad 40 \quad 46 \quad 49 \quad 25 \quad 13 \quad 7)\\ &(6 \quad 29 \quad 15 \quad 8 \quad 30 \quad 41 \quad 21 \quad 11)(10 \quad 31 \quad 16 \quad 34 \quad 43 \quad 22 \quad 37 \quad 19)\\ &(12 \quad 32 \quad 42 \quad 47 \quad 24 \quad 38 \quad 45 \quad 23)(18 \quad 35)\\ &(20 \quad 36 \quad 44 \quad 48 \quad 50 \quad 51 \quad 26 \quad 39)(52)\end{aligned}$$

$$p^8=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 52 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 52\end{pmatrix}=e$$

2.3 对换

[定义] 2-轮换称为对换。

[定理] 每个轮换都能写成对换的乘积。

证明：一种写法是$(a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n\ )=(a_1\ a_2)(a_1\ a_3)\ldots(a_1\ a_n)$，注意其中$(a_1\ a_k)\ (a_1\ a_{k+1})$导致将$a_k$放到$a_{k+1}$处。

轮换写成对换的方法不是唯一的，例如

$$
\begin{aligned}
(1\ 2\ 3\ 4\ 5) &= (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 5)\\
&= (2\ 4)(1\ 5)(1\ 3)(3\ 4)(1\ 4)(2\ 5)\\
&= (1\ 5)(2\ 5)(4\ 3)(3\ 5)
\end{aligned}
$$

置换和对换

[定理] 将一个置换写成对换的乘积，或者都使用了偶数个因子，或者都使用了奇数个因子

证明：令表达式 D_n=(2-1)(3-2)(3-1)(4-3)(4-2)(4-1)…(n-1)。对换$(x\ y)$, $x<y$ 将 D_n 中的 x 换成 y、y 换成 x，有

1) 若 $a<x,a<y$ 则$(x-a)$和$(y-a)$调换位置
2) 若 $a>x,a>y$ 则$(a-x)$和$(a-y)$调换位置
3) 若 $x<a<y$ 则$(a-x)$和$(y-a)$变成$(a-y)$和$(x-a)$
4) $(x-y)$变成$(y-x)$

因此$(x\ y)D_n=-D_n$。

P 是某一置换，p 分解成换位之积，若 p 分解成奇数个换位之积，则 p 作用于 f 的结果使 f 变号；若 p 分解成为偶数个换位之积，则 p 作用于 f 的结果不变，p 作用于 f 的结果是固有的，它取决于 p 本身，故 p 分解成奇数个或偶数个换位之积也取决于 p 本身，而不依赖于分解过程。因此可以写成奇数个对换的乘积的置换不能写成偶数个对换的乘积，可以写成偶数个对换的乘积的置换不能写成奇数个对换的乘积。

奇置换和偶置换

[定义] 若一个置换可分解成奇数个换位之积，叫做奇置换；若可分解成偶数个换位之积，叫做偶置换。

[例]每次移动一个方块到空位，左边的布局能否变成右边的布局？

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\xrightarrow{\ ?\ }$

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

解：一次移动是一个对换，显然空格移动回右下角需要移动偶数次。因此只有从左右两图构成的置换是一个偶置换，左边的布局才可能变成右边的布局。标记空格为 0，…

$$p=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15\\ 0 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$
$$=(0)(1\ \ 15)(2\ \ 14)(3\ \ 13)(4\ \ 12)(5\ \ 11)(6\ \ 10)(7\ \ 9)(8)$$

P 是个奇置换。产生矛盾。

交代群

[定理] 令 A_n 为 S_n 中所有的偶置换的集合，则$|A_n|=\frac{1}{2}n!$，且 A_n 是一个群。

A_n 称为 n 阶交代群

证明：1) 计数。可以建立奇置换和偶置换间的一一对应，方法是乘以(1 2)。
2) A_n 是一个群。单位元是 I，因为

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}=(1\ 2)(1\ 2)=I$$

一个对换的逆元是它自身，从而 $p=t_1t_2\ldots t_m$ 的逆元是 $t_m\ldots t_2t_1$

[例] S_3 的 6 个置换 $p_1=(1)(2)(3)$,$p_2=(1\ 2\ 3)$,$p_3=(1\ 3\ 2)$,$p_4=(1)(2\ 3)$, $p_5=(2)(1\ 3)$,$p_6=(3)(1\ 2)$ 中 p_1,p_2,p_3 是偶置换，因此

$$A_3=\{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

3 共轭类

[定义] 将 S_n 中的置换写成不相交的轮换时可以按照轮换的阶数对置换分类，这些类称为共轭类。共轭类表示为$1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}$，即该类具有 c_i 个 i-轮换，1≤i≤n。

[例] (1)(2 3)(4 5 6 7)和(1 2)(3 4 5 6)(7)属于同一类，它们都包含 1 个 1-轮换、 1 个 2-轮换和 1 个 3-轮换，这个类别表示为 $1^12^13^1$。

[例] S_3 中的置换分类如下：

$$\left.\begin{array}{lll} 1^02^03^1 & (1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2) & 3=3\\ 1^12^13^0 & (1)(2\ 3),\ (2)(1\ 3),\ (3)(1\ 2) & 3=1+2\\ 1^32^03^0 & (1)(2)(3) & 3=1+1+1\end{array}\right\}1c_1+2c_2+3c_3=3$$

[定理] S_n 中共轭类的个数等于 n 的划分个数 $p(n)$

共轭类中的置换计数

[定理] S_n中属于共轭类$1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}$的置换的数目是

$$\frac{n!}{c_1!\ c_2!\cdots c_3!1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}}$$

证明：共轭类$1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}$中的置换，对应于下面的记法

$$\underbrace{(x)(x)\cdots(x)}_{c_1}\underbrace{(xx)(xx)\cdots(xx)}_{c_2}\cdots\underbrace{(xx\cdots x)\cdots(xx\cdots x)}_{c_n}$$

n个x先以$n!$种方法填入,然后去掉重复。重复来自于两个方面。第一是c_k个$k-$轮换的排列，例如(1)(2)和(2)(1),造成的重复，这种重复有$c_k!$ 次。第二是一个$k-$轮换的不同写法，例如(1 2)和(2 1)，造成的重复，这种重复有k^{c_k}次.

[例] 求 S_3 中每个共轭类中轮换的个数

写成 k 个轮换的置换计数

[定理] S_n 中恰好可以写成 k 个不相交的轮换的置换的数目是$|s(n,k)|$

证明：用 $A(n,k)$表示所求的数目。写成 k 个不相交的轮换的置换可以由 S_{n-1} 中的元素来构造，即 S_{n-1} 中写成(k-1)个轮换的置换加上一个(n)，或者将 n 插入到 S_{n-1} 中写成 k 个轮换的置换中去，后者共有 n-1 种插入方法。因此 $A(n,k)=A(n-1,k-1)+(n-1)A(n-1,k)$, $A(n,0)=0$, $A(1,1)=1$, $A(2,1)=1$, $A(2,2)=1$，这正好是无符号的第一类 Stirling 数的递推公式

[例] 求 S_3 中恰好可以写成 3 个不相交的轮换的置换的个数

解：$(x)(x-1)(x-2)=2x-3x^2+x^3$

S_4

[例] S_3：(1)(2)(3),(1 2 3),(1 3 2),(1)(2 3),(2)(1 3),(3)(1 2)，因此

S_4=~~(1)(2)(3)(4)~~, (1 4)(2)(3), (1)(2 4)(3), (1)(2)(3 4),
~~(1 2 3)(4)~~, (1 2 3 4), (1 2 4 3), (1 4 2 3),
~~(1 3 2)(4)~~, (1 3 2 4), (1 3 4 2), (1 4 3 2),
(1)(2 3)(4),~~(1 4)(2 3), (1)(2 3 4), (1)(2 4 3)~~,
(2)(1 3)(4),~~(2 4)(1 3),(2)(1 3 4),(2)(1 4 3)~~,
(3)(1 2)(4), ~~(3 4)(1 2), (3)(1 2 4), (3)(1 4 2)~~

A_4={I, (1 2 3), (1 3 2),(1 4)(2 3), (2 3 4), (2 4 3), (2 4)(1 3),(1 3 4),(1 4 3), (3 4)(1 2), (1 2 4), (1 4 2)}

4 Burnside 引理

4.1 k 的轨道

[定义] 假设 G 是 S_n 的子群，1≤k≤n。k 的轨道是一个集合 E_k：若 $p\in G$，p 将 k 放置到 l 上，则 $l\in E_k$。

[例] 若 $G=\{I, (1\ 2), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4)\}$，则 $E_1=E_2=\{1, 2\}, E_3=E_4=\{3, 4\}$

[例] 对于交代群 A_4，有 $E_1=E_2=E_3=E_4=\{1, 2, 3, 4\}$

置换群导出的等价关系
[定义] 置换群 G 导出的关系 R 定义为：若 $p\in G$，p 将 a 放置到 b 上，则 aRb。

[定理] R 是一个等价关系。
证明：自反性；对称性；传递性。

置换群 G 导出的关系 R 将$\{1, 2, \cdots, n\}$划分为若干个等价类，每个等价类是一个轨道。

4.2 k 的稳定集

[定义] 假设 G 是 S_n 的子群。使 k 保持不动(即将 k 放置到 k 自身)的 G 中所有置换的集合 Z_k 称为 k 的稳定集。

[例] 若 $G=\{I, (1\ 2), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4)\}$，则 $Z_1=\{I, (3\ 4)\}, Z_2=\{I, (3\ 4)\},Z_3=\{I, (1\ 2)\},Z_4=\{I, (1\ 2)\}$

[例] 对于交代群 A_4，有 $Z_1=\{I, (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}, Z_2=\{I, (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3)\},Z_3=\{I, (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2)\},Z_4=\{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

k 的稳定集是一个群
[定理] Z_k 是一个群

证明：封闭性；结合律；单位元；逆元素。

$|E_k|\cdot|Z_k| = |G|$
[定理] 对于 Sn 的子群 G 和数 k，$|E_k|\cdot|Z_k|=|G|$

证明：首先构造一个置换集合 P_k。若 $E_k=\{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$，则 $P_k=\{p_1, p_2, \ldots, p_l\}$，$p_i\in G$ 且 p_i 将 k 放置到 a_i 处。注意 p_i 的选取方法不是唯一的，但一经选用就确定了。$|P_k|=|E_k|$。接下来只需要证明 G 中的每一个元素都能用一种唯一的方法写成 P_k 中一个置换和 Z_k 中一个置换的乘积：1)设 $g\in G$ 且 g 将 k 放置到 a_i 处。对于 $p_i\in P_k$，p_i^{-1} 将 a_i 放置到 k 处。显然 $gp_i^{-1}\in Z_k$。令 $z=gp_i^{-1}$ 则 $g=z\,p_i$。2) 若 $g=z_1 p_i, g=z_2 p_i$，则根据置换群的性质有 $z_1=z_2$

4.3 Burnside 引理

[定理] G 是 S_n 的子群， G 导出的不同的等价类的个数为

$$l=\frac{1}{|G|}[c_1(g_1)+c_1(g_2)+\cdots+c_1(g_{|G|})]$$

其中 $g_1, g_2, \ldots, g_{|G|}\in G$，$c_1(g)$表示置换 g 中 1-轮换的个数。

证明:1) $c_1(g_1)+c_1(g_2)+\cdots+c_1(g_{|G|})=|Z_1|+|Z_2|+\cdots+|Z_n|$

2) $\frac{1}{|G|}[c_1(g_1)+c_1(g_2)+\cdots+c_1(g_{|G|})]=\frac{1}{|E_1|}+\frac{1}{|E_2|}+\cdots+\frac{1}{|E_n|}$

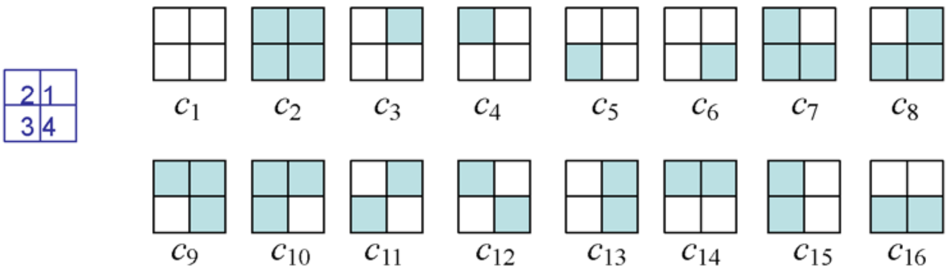
3) 如果$E_7=\{7,9,12,14\}$，则$\frac{1}{|E_7|}+\frac{1}{|E_9|}+\frac{1}{|E_{12}|}+\frac{1}{|E_{14}|}=1$

一般每个具有m个元素的轨道都可以用m项的和表示

$$\frac{1}{|E_x|}+\frac{1}{|E_y|}+\cdots+\frac{1}{|E_z|}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}=1$$

Burnside 引理-例题(1)

[例] 一正方形均分成 4 格，用两种颜色着色，能得到多少种不同的图像？如果一个图像旋转后与另一个图象吻合，则两个图象算相同的。



对象集 D={1,2,3,4},颜色集 R={1,2},着色集 $S=\{c_1,c_2,\ldots,c_{16}\}$

着色集 S 上的置换群 $P=\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$

逆时针转 0 度：$p_1=(c_1)(c_2)(c_3)(c_4)(c_5)(c_6)(c_7)(c_8)(c_9)(c_{10})(c_{11})(c_{12})(c_{13})(c_{14})(c_{15})(c_{16})$

逆时针转 90 度：$p_2=(c_1)(c_2)(c_3\ c_4\ c_5\ c_6)(c_7\ c_8\ c_9\ c_{10})(c_{11}\ c_{12})(c_{13}\ c_{14}\ c_{15}\ c_{16})$

逆时针转 180 度： $p_3=(c_1)(c_2)(c_3\ c_5)(c_4\ c_6)(c_7\ c_9)(c_8\ c_{10})(c_{11})(c_{12})(c_{13}\ c_{15})(c_{14}\ c_{16})$

逆时针转 270 度： $p_4=(c_1)(c_2)(c_6\ c_5\ c_4\ c_3)(c_{10}\ c_9\ c_8\ c_7)(c_{11}\ c_{12})(c_{16}\ c_{15}\ c_{14}\ c_{13})$

对象集 D 上的置换群 $G=\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$

g_1=(1)(2)(3)(4)

g_2=(1 2 3 4)

g_3=(1 3)(2 4)

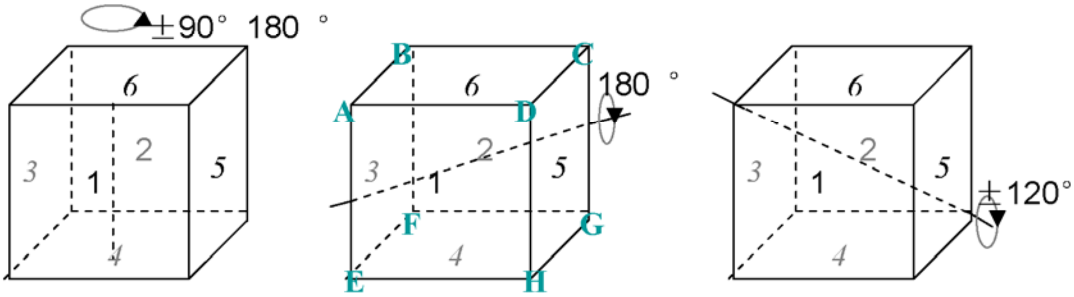
g_4=(1 4 3 2)

称群 G 诱导出群 P，gi 诱导出 pi

根据 Burnside 引理，共 l=(16+2+2+4)/4=6(种方案)

Burnside 引理-例题(2)

[例]用六种颜色给立方体的六个面着色，每面颜色不同，并且当一个着色的立方体经转动可得到另一个时，就认为二者相同。问有多少种着色方案？



解：对象集 D ={1,2,3,4,5,6}，颜色集 R={1,2,3,4,5,6}， 用 R 对 D 着色，要求每个面着不同的颜色，因此着色集 S 有 6!个元素。D 上的置换群 G 有 24 个元素，P 是 G 诱导出的 S 上的一个置换群，也有 24 个元素。由于 P 中只有恒等置换包含 6!个 1-轮换，其他置换则不包含 1-轮换，因此 $l=\frac{1}{24}[6!+0+\cdots+0]=30$。

不动

g_1=(1)(2)(3)(4)(5)(6)

过面 12，35，46 中心的轴， 90°,180 °,270 °

g_2=(1)(2)(3 4 5 6)　　g_3=(1)(2)(3 5)(4 6)　　g_4=(1)(2)(3 6 5 4)

g_5=(3)(5)(1 4 2 6)　　g_6=(3)(5)(1 2)(4 6)　　g_7=(3)(5)(1 6 2 4)

g_8=(4)(6)(1 5 2 3)　　g_9=(4)(6)(1 2)(3 5)　　g_{10}=(4)(6)(1 3 2 5)

过边 BF-DH,AE-CG,AB-HG,EF-DC,EH-BC,AD-FG 中点的轴

g_{11}=(1 5)(2 3)(4 6)　　g_{12}=(1 3)(2 5)(4 6)　　g_{13}=(1 2)(3 6)(4 5)

g_{14}=(1 2)(3 4)(5 6)　　g_{15}=(1 4)(2 6)(3 5)　　g_{16}=(1 6)(2 4)(3 5)

对角线 BH,CE,DF,AG，120°,240 °

g_{17}=(1 4 5)(2 6 3)　　g_{18}=(1 5 4)(2 3 6)

g_{19}=(1 4 3)(2 6 5)　　g_{20}=(1 3 4)(2 5 6)

g_{21}=(1 5 6)(2 3 4)　　g_{22}=(1 6 5)(2 4 3)

g_{23}=(1 3 6)(2 5 4)　　g_{24}=(1 6 3)(2 4 5)

5 Polya 定理

5.1 特殊形式

[定理] 设 G 是 n 个对象的一个置换群，用 m 种颜色涂染这 n 个对象，则不同的染色方案数为

$$l=\frac{1}{|G|}[m^{c(g_1)}+m^{c(g_2)}+\cdots+m^{c(g_{|G|})}]$$

其中 $G=\{g_1, g_2, \ldots, g_{|G|}\}$，$c(g)$表示置换 g 中轮换的个数。

证明：对象集 $D=\{1,2,\ldots,n\}$，颜色集 $R=\{1,2,\ldots,m\}$，着色集 S 有 m^n 个元素。D 上的置换群 G 诱导出 S 上的一个置换群 P，$|P|=|G|$。为了应用 Burnside 引理，要求出 P 中的每个置换包含的 1-轮换个数。

假设 g 诱导出 p,如果给 g 的每一个轮换着相同的颜色，那么这个着色在 p 中将保持不动。例如 $g=(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7)$，着色

红 1，红 2，红 3，蓝 4，蓝 5，蓝 6，绿 7

在 p 中将保持不动。因此 p 中 1-轮换的个数是 $m^{c(g)}$。

特殊形式-例题(1)

[例] 一正方形均分成 4 格，用两种颜色着色，能得到多少种不同的图像？如果一个图像旋转后与另一个图象吻合，则两个图象算相同的。

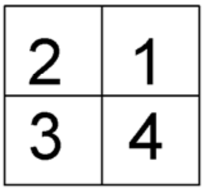
解：运动群 $G=\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$

$g_1=(1)(2)(3)(4)$　　$c(g_1)=4$

$g_2=(1\ 2\ 3\ 4)$　　$c(g_2)=1$

$g_3=(1\ 3)(2\ 4)$　　$c(g_3)=2$

$g_4=(1\ 4\ 3\ 2)$　　$c(g_4)=1$



根据 Polya 定理

$$l=\frac{1}{4}[2^4+2^1+2^2+2^1]=6$$

特殊形式-例题(2)

[例] 求用三种颜色对一个等边三角形顶点着色的方法数。如果一种着色可由另一种着色旋转产生，或者如果一种着色是另一种着色的翻转，则认为两种着色是相同的。

解：运动群 G 正好是 S_3

$g_1=(1)(2)(3)$　　$c(g_1)=3$　　$1^3 2^0 3^0$

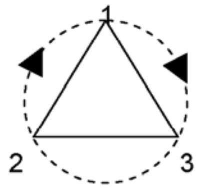
$g_2=(1\ 2\ 3)$　　$c(g_2)=1$　　$1^0 2^0 3^1$

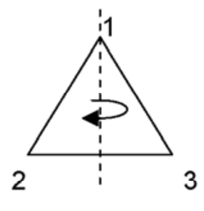
$g_3=(1\ 3\ 2)$　　$c(g_3)=1$

$g_4=(1)(2\ 3)$　　$c(g_4)=2$

$g_5=(2)(1\ 3)$　　$c(g_5)=2$　　$1^1 2^1 3^0$

$g_6=(3)(1\ 2)$　　$c(g_6)=2$





$$l=\frac{1}{6}[3^3+2\cdot 3^1+3\cdot 3^2]=10$$

权重

[定义] 设对象集 $D=\{d_1,d_2,\ldots,d_n\}$，颜色集 $R=\{1,2,\ldots,m\}$，颜色 r 的权重为 $w(r)$。如果 C 是对 D 中对象的一种着色，则定义 C 的权重为所赋予的颜色的权重的乘积。

[例] 若 $D=\{d_1,d_2,d_3\}$, $R=\{$红,蓝$\}$, $w($红$)=2$, $w($蓝$)=3$，则着色

d_1 红, d_2 蓝, d_3 红

的权重为

$$w(红)w(蓝)w(红)=12$$

清单

[定义] 如果 S 是着色的集合，则定义 S 的清单为 S 中着色权重的和，记作 $inv(S)$

[定理] R 对 D 所有可能着色集合的清单为$[w(1)+ w(2)+ \ldots +w(m)]$n

[定理] 设 S 是所有着色的集合，D 被分解为不相交的子集 $D_1, D_2, \ldots, D_k$，每个子集着一个颜色，则 S 的清单为

$$\begin{aligned}inv(S) = &[w(1)^{|D_1|} + w(2)^{|D_1|} + \cdots + w(m)^{|D_1|}]\\ &\times[w(1)^{|D_2|} + w(2)^{|D_2|} + \cdots + w(m)^{|D_2|}]\\ &\times\cdots\\ &\times[w(1)^{|D_k|} + w(2)^{|D_k|} + \cdots + w(m)^{|D_k|}]\end{aligned}$$

掷骰子

[例]掷出五个骰子 d_1, d_2, d_3, d_4, d_5。有多少种方法使 $d_1= d_2=d_3$， $d_4=d_5$ 而总和为 19?

解：可以将这个问题可以看作着色问题。颜色集 R={1,2,3,4,5,6}。假设颜色 r 的权重为 x^r，则

$$\begin{aligned}inv(S) &= [x^{1\times3}+x^{2\times3}+x^{3\times3}+x^{4\times3}+x^{5\times3}+x^{6\times3}][x^{1\times2}+x^{2\times2}+x^{3\times2}+x^{4\times2}+x^{5\times2}+x^{6\times2}]\\ &= x^5+x^7+x^8+x^9+x^{10}+2x^{11}+2x^{12}+2x^{13}+2x^{14}+2x^{15}+2x^{16}+2x^{17}\\ &\quad+2x^{18}+2x^{19}+2x^{20}+2x^{21}+2x^{22}+x^{23}+x^{24}+x^{26}+x^{27}+x^{28}+x^{30}\end{aligned}$$

$inv(S)$是一个母函数。有两种方法掷骰子使得总和 19： $d_1= d_2=d_3=3,d_4=d_5=5$ 和 $d_1=d_2=d_3=5,d_4=d_5=2$

Burnside 引理的权重形式

[定理] G 是 S_n 的子群， 数 k 的权重由函数 w 给出，一个轨道中的所有数有相同的权重。设 G 导出的轨道是 $O_1, O_2, \ldots, O_l$，每个轨道的权重等于其中一个数的权重。若 $g\in G$，令 $w'(g)$ 为 g 所保持不动的所有数权重的和。则有

$$w(O_1)+w(O_2)+\cdots+w(O_l)=\frac{1}{|G|}[w'(g_1)+w'(g_2)+\cdots+w'(g_{|G|})]$$

证明:1) $w'(g_1)+w'(g_2)+\cdots+w'(g_{|G|}) = w(1)|Z_1|+w(2)|Z_2|+\cdots+w(n)|Z_n|$

2) $\frac{1}{|G|}[w'(g_1)+w'(g_2)+\cdots+w'(g_{|G|})]=\frac{w(1)}{|E_1|}+\frac{w(2)}{|E_2|}+\cdots+\frac{w(n)}{|E_n|}$

3) 每个具有m个元素的轨道的权重都可以用m项的和表示

$$\frac{w(x_1)}{|E_{x_1}|}+\frac{w(x_2)}{|E_{x_2}|}+\cdots+\frac{w(x_m)}{|E_{x_m}|}=\frac{w(O_x)}{m}+\frac{w(O_x)}{m}+\cdots+\frac{w(O_x)}{m}=w(O_x)$$

5.2 一般形式

[定理] 用 m 种颜色涂染 n 个对象，设 G 是着色的一个置换群，则所有 G 导出的轨道的清单

为

$$\frac{1}{|G|}[w_1^{c_1(g_1)}w_2^{c_2(g_1)}\cdots w_n^{c_n(g_1)}+w_1^{c_1(g_2)}w_2^{c_2(g_2)}\cdots w_n^{c_n(g_2)}$$
$$+\cdots+w_1^{c_1(g_{|G|})}w_2^{c_2(g_{|G|})}\cdots w_n^{c_n(g_{|G|})}]$$

其中

$$w_1=w(1)+w(2)+\cdots+w(m), w_2=w(1)^2+w(2)^2+\cdots+w(m)^2,$$
$$\cdots, w_n=w(1)^n+w(2)^n+\cdots+w(m)^n$$

$c_s(g_r)$表示置换 g_r 中 s-轮换的个数。

证明：根据 Burnside 引理的权重形式，所有 G 导出的轨道权重的总和为

$$\frac{1}{|G|}[w'(g_1)+w'(g_2)+\cdots+w'(g_{|G|})]$$

其中 $w'(g)$是 g 保持不动的着色的权重和。设 g 的轮换是 $D_1, D_2, \ldots, D_k$，则 g 保持不动的着色的权重和为

$$\begin{aligned}w'(g)=&[w(1)^{|D_1|}+w(2)^{|D_1|}+\cdots+w(m)^{|D_1|}]\\&\times[w(1)^{|D_2|}+w(2)^{|D_2|}+\cdots+w(m)^{|D_2|}]\\&\times\cdots\\&\times[w(1)^{|D_k|}+w(2)^{|D_k|}+\cdots+w(m)^{|D_k|}]\end{aligned}$$

$w'(g)$的展开式中每一项具有形式

$$w_s=w(1)^s+w(2)^s+\cdots+w(m)^s$$

w_s 的个数恰好是 s-轮换的数目，即 $c_s(g)$

一般形式-例题(1)

[例] 用 4 颗珠子（两颗蓝色、一颗红色和一颗黄色）能做成多少种项链？

解：$g_1=(1)(2)(3)(4) \quad =1^4 2^0 3^0 4^0$

$g_2=(1\ 2\ 3\ 4) \quad =1^0 2^0 3^0 4^1$

$g_3=(1\ 3)(2\ 4) \quad =1^0 2^2 3^0 4^0$

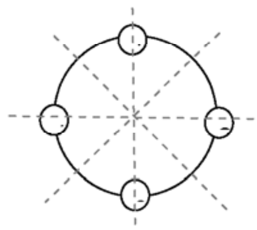
$g_4=(1\ 4\ 3\ 2) \quad =1^0 2^0 3^0 4^1$

$g_5=(1)(2\ 4)(3) \quad =1^2 2^1 3^0 4^0$

$g_6=(1\ 3)(2)(4) \quad =1^2 2^1 3^0 4^0$

$g_7=(1\ 2)(3\ 4) \quad =1^0 2^2 3^0 4^0$

$g_8=(1\ 4)(2\ 3) \quad =1^0 2^2 3^0 4^0$



根据特殊形式的 Polya 定理

$$l=\frac{1}{8}[3^4+3^1+3^2+3^1+3^3+3^3+3^2+3^2]$$
$$=\frac{1}{8}[3^4+2\cdot 3^1+3\cdot 3^2+2\cdot 3^3]=21$$

令 $w(1)=w(2)=b, w(3)=r, w(4)=y$，根据一般形式的 Polya 定理，

$$inv(S)=\frac{1}{8}[w_1^4+w_4^1+w_2^2+w_4^1+w_1^2w_2^1+w_1^2w_2^1+w_2^2+w_2^2]$$
$$=\frac{1}{8}[(b+r+y)^4+2(b^4+r^4+y^4)+3(b^2+r^2+y^2)^2$$
$$+2(b+r+y)^2(b^2+r^2+y^2)]$$
$$=b^4+r^4+y^4+b^3r+b^3y+br^3+r^3y+by^3+ry^3$$
$$+2b^2r^2+2b^2y^2+2r^2y^2+2b^2ry+2br^2y+2bry^2$$

可知能做成 2 种项链。实际上不需要完全展开 $inv(S)$

一般形式-例题(2)

[例]用六种颜色给立方体的六个面着色，每面颜色不同，并且当一个着色的立方体经转动可得到另一个时，就认为二者相同。问有多少种着色方案?

解：$inv(S)=[w_1^6+6w_1^2w_4^1+3w_1^2w_2^2+6w_2^3+8w_3^2]/24$

$$=[(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^6$$
$$+6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4+x_5^4+x_6^4)$$
$$+3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2)^2$$
$$+6(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2)^3$$
$$+8(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+x_5^3+x_6^3)^2]/24$$

问题是要求$x_1x_2x_3x_4x_5x_6$的系数，它只能在$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^6$的展开式中出现。根据多项式公式，$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)^6$展开后$x_1x_2x_3x_4x_5x_6$的系数为$6!$，故不同的着色方案数是 $6!/24=30$