第 6 讲 鸽巢原理

何英华
天津大学计算机科学与技术学院
（hyh@tju.edu.cn，http://202.113.12.9/~hyh）

1 鸽巢原理

1.1 鸽巢原理

[鸽巢原理] 若有 n 个鸽巢，n+1 只鸽子，则至少有一个巢内至少有两只鸽子。

*鸽巢原理主要用于解决存在性问题

鸽巢原理举例
[例] 从 1 到 $2n$ 的正整数中任取 $n+1$ 个数，则这 $n+1$ 个数中，至少有一对数，其中一个是另一个的倍数。
证明：设 $n+1$ 个数是 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$。每个数去掉一切 2 的因子，直至剩下一个奇数为止得到序列 $r_1, r_2, \cdots, r_{n+1}$。这 $n+1$ 个数仍在[1 , $2n$]中，且都是奇数，但[1 , $2n$]中只有 n 个奇数，故有 $r_i=r_j=r$。再设

$$a_i = 2^{b_i} r，a_j = 2^{b_j} r，$$

因为$a_i \neq a_j$，则a_i是a_j的倍数。

[例] 设 a_1, a_2, a_3 为任意 3 个整数，$b_1b_2b_3$ 为 a_1, a_2, a_3 的任一排列，则 $a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3$ 中至少有一个是偶数
证明：由鸽巢原理，a_1, a_2, a_3 中必有两个同奇偶. 设这 3 个数被 2 除的余数为 xxy。假设 $a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3$ 中没有一个是偶数，则它们被 2 除的余数没有一个为 0，从而 b_1, b_2, b_3 这 3 个数被 2 除的余数为 yyx，由于 $b_1b_2b_3$ 为 a_1, a_2, a_3 的任一排列，因此产生矛盾。

[例] 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 是由 1 和 2 组成的序列，已知从其任一数开始的顺序 10 个数的和不超过 16. 证明至少存在 h 和 k，$k>h$，使得 $a_h + a_{h+1} + \ldots + a_k = 39$
证明：令 $S_i=a_1+a_2+\ldots+a_i$，显然 $S_1<S_2<\ldots<S_{100}$ 成立，且 $S_{100} \leqslant 10\times 16 = 160$。作序列

$$S_1, S_2, \ldots, S_{100}, S_1+39, \ldots, S_{100}+39$$

该序列共有 200 项，其中最大项 $S_{100}+39 \leqslant 160+39=199$

由鸽巢原理，此序列中必有两项相等，且必是前半段中某项与后半段中某项相等。假设 $S_k=S_h+39$，则可得 $k>h$，$S_k-S_h=39$，即 $a_h + a_{h+1} + \ldots + a_k = 39$

1.2 鸽巢原理的推广

若有 n 个鸽巢，$kn+1$ 个鸽子，则至少有一个巢内至少有 $k+1$ 个鸽子

[定理]m只鸽子，n个鸽巢，则至少有一个鸽巢里有不少于$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor+1$只鸽子。

证明：

如若不然，鸽巢里的鸽子不超过$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$只，则 n 个鸽巢的鸽子数不超过

$$n\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leq m-1$$

与假定矛盾。

[定理] 若取 n(m-1)+1 个球放进 n 个盒子，则至少有 1 个盒子有 m 个球。

[定理] 若 m_1，m_2，…，m_n 是 n 个正整数，而且

$$\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n} > r-1$$

则 m_1，m_2，…，m_n 中至少有 1 个数不小于 r。

[例] 若序列 $a_1, a_2, \cdots a_{n^2+1}$ 的 n^2+1 个元素是不相等的实数，则该序列或者包含一个 $n+1$ 项的递增子序列，或者包含一个 $n+1$ 项的递减子序列。

举例说明含义：

对于序列：

5，3，16，10，15，14，9，11，6，7

从中可以选出不相同的单调增子序列，例如：

$$\{5,16\}；\{5,10,15\}；\{3,9,11\}；\{3,6,7\}；\ldots$$

也可以从中选出单调减子序列，如

$$\{5,3\}；\{16,10,9,6\}；\{16,15,14,11,7\}；\ldots$$

证明：

对每一项 a_i 关联一个数 t_i，表示从 a_i 开始的最长递增子序列中有多少项，显然有 n^2+1 个 t_i。若存在某个 $t>n+1$，则得到所求的递增序列，否则所有 $t_i \leqslant n$，由于集合$\{t_i\}_{i=1}^{n^2+1}$中的元素的个数为n^2+1，根据鸽巢原理集合$\{t_i\}_{i=1}^{n^2+1}$中必有 $n+1$

个元素相等，设这 n+1 个元素构成的集合为 $\{t_{k_i}\}_{i=1}^{n+1}$。现在证明这些相等的元素关联的 $\{a_{k_i}\}_{i=1}^{n+1}$ 构成一个递减子序列：假设 a_i, a_j $(i<j)$对应的 t_i, t_j 相等，则 $a_i>a_j$，否则将形成从 a_i 开始的长为 $t+1$ 的递增子序列。

[例] A={1,2,⋯,99}, X 是 A 的子集，且|X|=10，则可以找到 X 的两个非空真子集 Y 和 Z，使得 Y 的元素之和和 Z 的元素之和相等。
证明：由于|X|=10 ，所以的 X 非空真子集的数目为 2^{10}-2=1022。另一方面，X 的非空真子集的元素之和大于等于 1 且小于等于 855。问题相当于将 1022 只鸽子放入 855 个鸽巢。

[定理] 设有 $p_1+p_2+\ldots+p_n-n+1$ 只鸽子，有标号分别为 $1,2,\ldots,n$ 的鸽巢，则存在至少一个标号为 j 的鸽巢至少有 p_j 只鸽子，$j=1,2,\ldots,n$
证明：如若不然，第 1 个鸽巢最多只有 p_1-1 只鸽子，第 2 个鸽巢最多只有 p_2-1 只鸽子，…，第 n 个鸽巢最多只有 p_n-1 只鸽子，则鸽子的总数最多不过

$$\begin{aligned}&(p_1-1)+(p_2-1)+\cdots+(p_n-1)\\&=p_1+p_2+\cdots+p_n-n\end{aligned}$$

与假定的鸽子数为 $p_1+p_2+\cdots+p_n-n+1$ 个相矛盾。

2 Ramsey 定理

鸽巢原理的进一步推广，以 Frank Plumpton Ramsey（1903-1930）的名字命名的 Ramsey 定理。
[定理] 6 个人中至少存在 3 个人相互认识或者相互不认识
证明：考虑第一个人 A，其余 5 个人分为两类

F=与第一个人相互认识

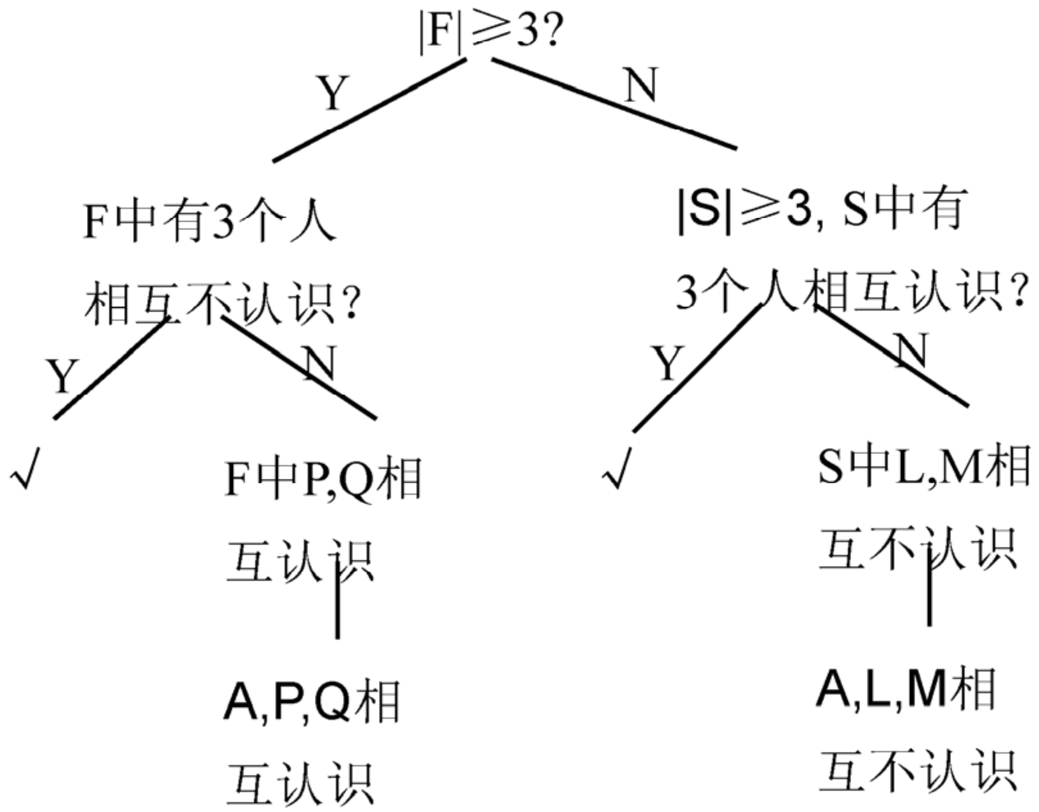
S=与第一个人相互不认识

则其中至少有一类有 3 个成员。

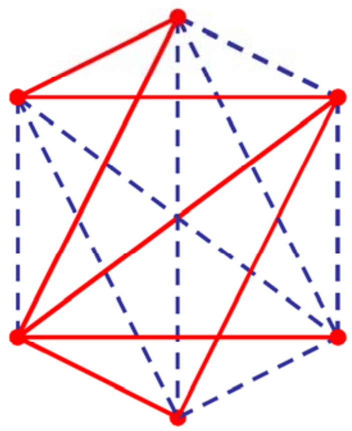
若类 F 有 3 个成员，则他们或者相互不认识，或者至少有一对 P,Q 相互认识，后面一种情况时 P,Q 加上第一个人 A 就构成 3 个人相互认识。

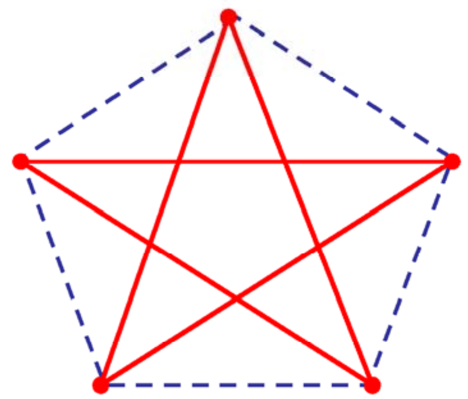
否则，类 S 有 3 个成员，他们或者互相认识，或者至少有一对 L,M 相互不认识，后面一种情况时 L,M 加上第一个人 A 就构成 3 个人相互不认识。

判断树



完全图的着色



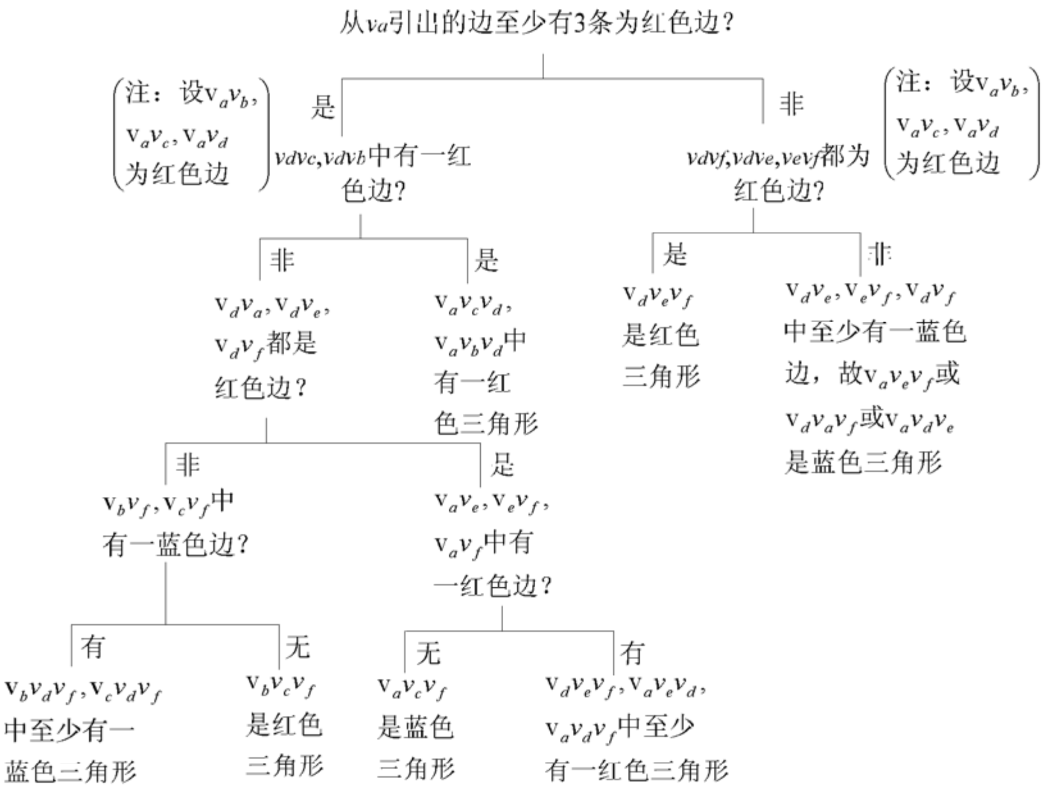


顶点表示人，红边连接相互认识的人，蓝边连接相互不认识的人。6 个顶点的完全图 K_6 中一定存在一个红色三角形 K_3 或者一个蓝色三角形 K_3 ，但是 5 个顶点的完全图 K_5 就不一定具备这一性质。那么，至少要多少个人才能保证有四个人相互认识或者相互不认识？或者说至少多少个顶点的完全图的边染红蓝两色时一定存在一个红色或者蓝色的完全四边形 K_4？

若干推论

(a) 对 6 个顶点的完全图的边用红蓝二色任意着色，结果至少有两个同色的三角形。

6 个顶点表示为 v_a，v_b，v_c，v_d，v_e，v_f，对 6 个顶点的完全图用红、蓝二色进行着色，至少有一个同色三角形，设 $v_a\ v_b\ v_c$ 是红色边的三角形。



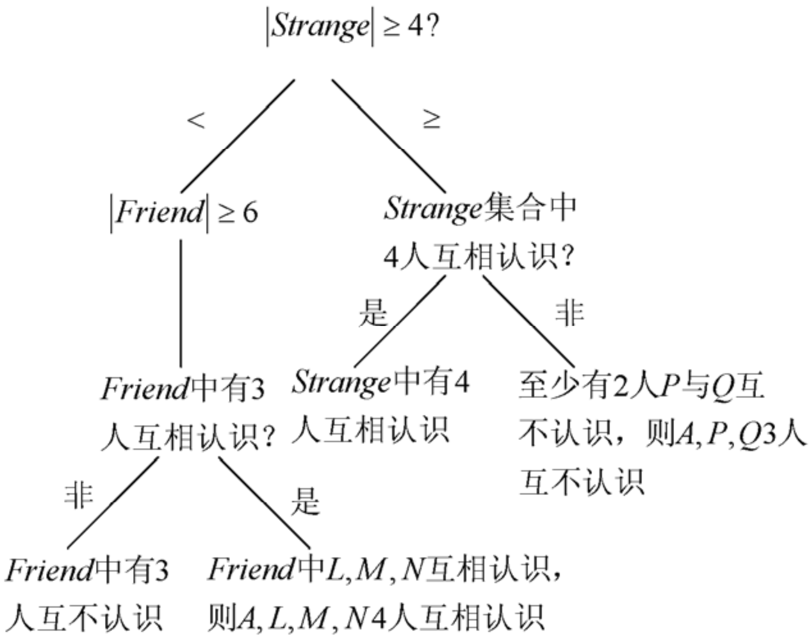
(b) 10 个人中若不是 3 个人互不认识，则必有 4 个人互相认识，同样，10 个人中若不是 3 个人互相认识，则必有 4 个人互不认识。

证明：

10 个人中有一个 A，余下的 9 个人分成与 A 互相认识的集合 Friend，以及与 A 互不相识的集合 Strange。

若 $|Strange| \geq 4$，即 Strange 集合中元素的数目大于等于 4，则如若 Strange 中有 4 个人互相认识，问题已得证，否则 Strange 有两人互不相识，这两人与 A 构成互不相识的 3 个人。

若 $|Strange| < 4$，即 $|Friend| \geq 6$，根据 6 人中必有 3 人互不相识或存在 3 人互相认识，若为前者定理已证；若 3 个人互相认识，这 3 个人与 A 构成互相认识的 4 个人。



(c) 问题(b)的结论只要有 9 个人就够了。问题相当于 9 个顶点的完全图用红、蓝二色任意着色，必然是红色三角形和蓝色的完全四边形两者必有其一。类似地，有红色完全四边形和蓝色边的三角形两者必有其一。

最少 9 个点。

(d) 18 个人中至少有 4 个人或互相认识或互相不认识。

这个问题相当于对 18 个顶点的完全图的边用红、蓝二色任意着色，则至少存在一个同色完全四边形。

设 18 个顶点分别为 v_1，v_2，。。。，v_{18}，从 v_{18} 引出的 17 条边至少有 9 条是同色，不妨假定是红色。这 9 条红色边的另 9 个端点构成的 9 个顶点的完全图中至少出现一个红色三角形，或一个蓝色的完全四边形。如果是存在一个红色三角形，设为 $v_i v_j v_k$，则 $v_{18} v_i v_j v_k$ 构成一个 4 个顶点的红色边的完全图。若是存在蓝色边完全四边形图，则满足问题的结论。

例 17 个顶点的完全图，即十七边形，且每一对不相邻的顶点都连以对角线所构成的图。用 3 种颜色对边任意着色，必存在一个同色三角形。

证明：

17 个顶点分别表以 A,B,C,…，每两点连以一边。连 X 和 Y 的边着以蓝（或红，黄）颜色，假如我们讨论第 1（或第 2，3 个）个问题。对于顶点 A，与 A 点关联的边有 16 条，每一条边着以 3 种颜色中的一种：蓝、红、黄。16=3*5+1。其中有一种颜色，不妨假设为蓝颜色至少有 5+1=6 条边，不失一般性，设 AB，AC，AD，AE，AF，AG 着蓝颜色。由 B，C，D，E，F，G 这 6 个顶点取两两彼此互连的 15 条边构成的图，若其中一条边设为 BC 着蓝色，则存在蓝色三角形 ABC。若无一条边是蓝色，则 15 条边着红、黄两种颜色。根据 6 个顶点的完全图的边着两种颜色，必然至少存在一同色三角形，则无论哪种情况比存在一同色三角形。

Ramsey 数

[定义] 给定一对正整数 a,b ($a,b\geqslant 2$)，若存在一个最小的正整数 n，使得对 n 个顶点的完全图 K_n 的边用红蓝两色任意着色时，总能找到一个 a 个顶点的红边完全图 K_a 或 b 个顶点的蓝边完全图 K_b，则称这个最小的正整数 n 为 Ramsey 数，记为 $R(a, b)$。

前面已经得出 $R(3,3)\leqslant 6$ 和 $R(3,3)>5$，因此 $R(3,3)=6$

[Ramsey 定理] 若整数 $a,b\geqslant 2$， $R(a, b)$ 存在。

Ramsey 数的性质 1

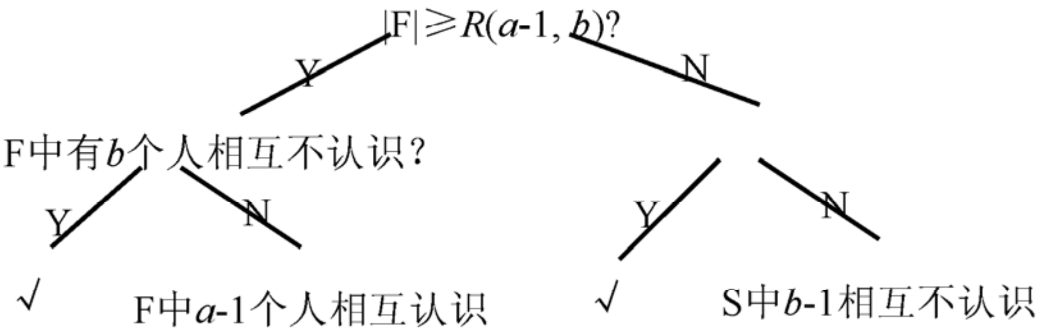
[定理] 1) $R(a, b)=R(b, a)$

2) $R(a, 2)=a$

3) 对所有 $a, b\geqslant 2$, $R(a, b)$是一个有限数，且

$$R(a, b)\leqslant R(a-1, b) +R(a, b-1)$$

证明：因为 $R(a-1, b) +R(a, b-1)-2+1$，所以$|F|\geqslant R(a-1, b)$或者$|S|\geqslant R(a, b-1)$

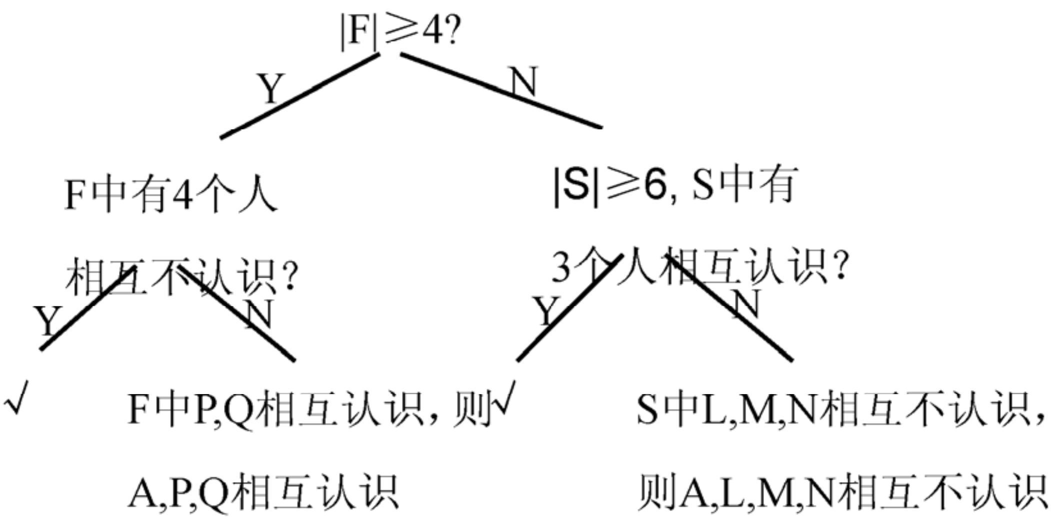


$R(3,4)=?$

[定理] 10 个人中若不是 3 个人相互认识就是 4 个人相互不认识

证明 1：$R(3,4)\leqslant R(2, 4) +R(3, 3)=10$

证明 2：



Ramsey 数的性质 2

[定理] 对所有 $a, b \geq 2$, 若 $R(a-1, b)$，$R(a, b-1)$是偶数，则

$$R(a, b) \leq R(a-1, b) + R(a, b-1) - 1$$

证明：

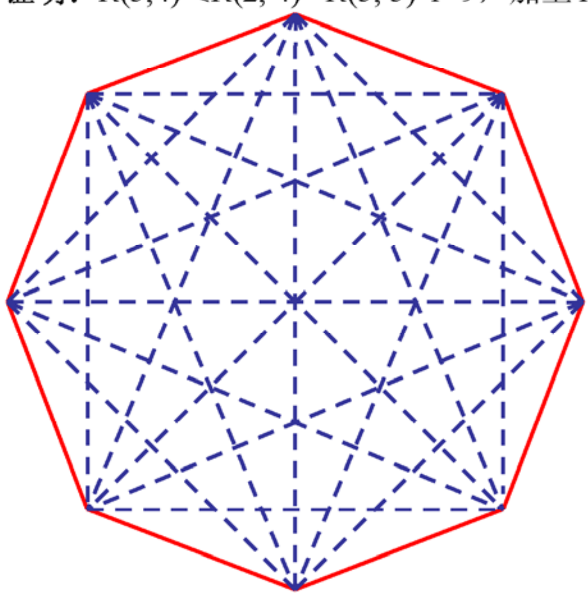
假设有 $m=R(a-1, b)+R(a, b-1)-1$ 个人。这时对于任何一个人，$|F| \geq R(a-1, b)$或者$|S| \geq R(a, b-1)-1$。当$|F| \geq R(a-1, b)$或者$|S| > R(a, b-1)-1$ 时 m 个人将有 a 个人相互认识或者 b 个人相互不认识。

现在证明$|S|=R(a, b-1)-1$ 这种取值是不可能的。否则 K_m 中将有 $\frac{m}{2}(R(a,b-1)-1)$ 条蓝边。但是 m 和 $R(a, b-1)-1$ 都是奇数！

$R(3,4)=9$

[定理] 9 个人中若不是 3 个人相互认识就是 4 个人相互不认识

证明：$R(3,4) \leq R(2, 4) + R(3, 3) - 1 = 9$，加上 $R(3,4) > 8$



$R(4,4)$以及其他 Ramsey 数

由于 $R(4,4) \leqslant R(3,\ 4)+R(4,\ 3)=18$，可以通过找到实例证明 $R(4,4)>17$，因此 $R(4,4)=18$

l k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	52 59	59 69	66 78	73 88
4		18	25	35 41	49 61	56 84	69 115	92 149	97 191	128 238	133 291	141 349	153 417
5			43 49	58 87	80 143	101 216	121 316	141 442	157	181	205	233	261
6				102 165	111 298	127 495	169 780	178 1171	253	262	317		401
7					205 540	216 1031	232 1713	2826	405	416	511		
8						282 1870	317 3583	6090			817		861
9							565 6588	580 12677					
10								798 23556					1265

Ramsey 数的推广 1

[定义] 将着两色改为着 m 色 $c_1,c_2,\ldots,c_m$，将完全图 K_a,K_b 改为完全图 $K_{a_1},K_{a_2},\cdots,K_{a_k}$，即得推广了的 Ramsey 数 $R(a_1,a_2,\ldots,a_m)$。

[Ramsey 定理] 若 $a_1,a_2,\ldots,a_m>1$，则

$$R(a_1,a_2,\ldots,a_m) \leqslant R(a_1,R(a_2,\ldots,a_m))$$

目前已知 $R(3,3,3)=17$

Ramsey 数的推广 2

[定义] 边表示了两个顶点间的关系，将着色对象由边改为 r 个顶点间的关系，即得推广了的 Ramsey 数 $R(a_1,a_2,\ldots,a_m;r)$。

将 n 个元素的所有 r 元素子集分为 m 类 $c_1,c_2,\ldots,c_m$，其中类 c_1 中将包含 a_1 个 r 元素子集，类 c_2 中将包含 a_2 个 r 元素子集，…，类 c_m 中将包含 a_m 个 r 元素子集。可以证明如下 Ramsey 定理：对于任意的 r 和 $a_1,a_2,\ldots,a_m>1$，$R(a_1,a_2,\ldots,a_m;r)$ 存在。

不难证明 $R(a_1,a_2,\ldots,a_m;1)=a1+a2+\ldots+a_m-m+1$，即当 $r=1$ 时，Ramsey 定理就是鸽巢原理。