第 5 讲 容斥原理

何英华
天津大学计算机科学与技术学院
（hyh@tju.edu.cn，http://202.113.12.9/~hyh）

1 引言

下面简述在解决错位排问题时引入的容斥原理（The Principle of Inclusion-Exclusion）。容斥原理是组合学中一个重要的应用原理。n 元集 S 中不具有性质 p_1，p_2，…，p_m 的元素数是：

$$N(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\overline{A}_m)=N-\sum_{i=1}^{m}N(A_i)+\sum_{1\le i<j\le m}N(A_i\cap A_j)-\sum_{1\le i<j<k\le m}N(A_i\cap A_j\cap A_k)+\cdots+(-1)^m N(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m) \tag{4.4.5}$$

其中 N（$A_i\cap A_j$）表示既具有性质 p_i 又具有性质 p_j 的元素个数。

尼古拉·贝努利（Nicholas Bernoulli，1623-1708）在解决错位排列时用到容斥原理，但他并没有明确提出这一原理[④]。容斥原理最早的数学形式由文（J. Venn ,1834-1923）以集合的形式明确给出。任意两个集合 A、B，有：

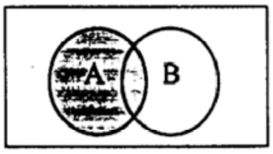


图 4.7 文氏图

N（$A\cup B$）$=N$（A）$+N$（B）$-N$（$A\cap B$）

N（0）$=N-N$（A）$-N$（B）$+N$（$A\cap B$）

其中 N（0）表示既不属于 A 也不属于 B 的元素个数。西尔沃斯特在计数方案计算中推广了文的方法，使其基本上成为现在的形式，故式（4.4.5）也称为 Sylvester 公式。棣莫弗在解决错位排列时得出了子集相交与相并的正确表达。容斥原理是解决一系列组合计数及数论问题的一种巧妙方法，特别是解决前面提到的 n 对“夫妻入座问题”。

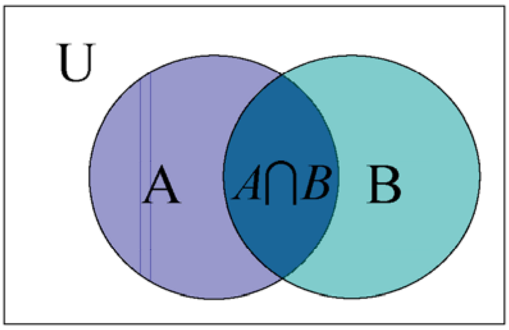
2 容斥原理

2.1 容斥原理

并集的计数

1．两个集合的并集

[定理]　|A∪B|=|A|+|B|-|A∩B|



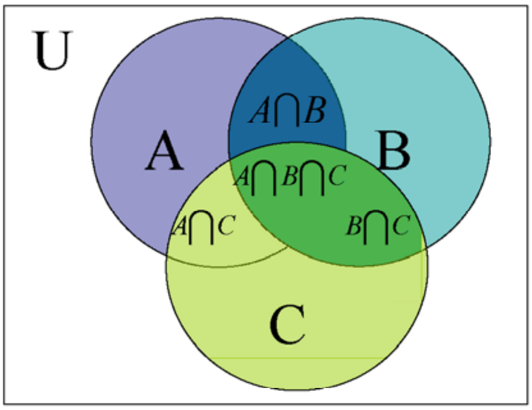
[例] 求不超过 20 的正整数中 2 或 3 的倍数的个数

解：令 A 为 2 的倍数集合，B 为 3 的倍数集合

$$\left.\begin{aligned}|A| &= \lfloor 20/2 \rfloor = 10 \\ |B| &= \lfloor 20/3 \rfloor = 6 \\ |A\cap B| &= \lfloor 20/6 \rfloor = 3\end{aligned}\right\} \qquad |A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B| = 13$$

三个集合的并集

[定理] $|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$



[例] 一个学校只有三门课程：数学、物理、化学。已知修这三门课的学生分别有 170、130、120 人；同时修数学物理两门课的学生 45 人；同时修数学化学的 20 人；同时修物理化学的 22 人。同时修三门课程的 3 人。问这学校共有多少学生，假设每个学生至少修一门课？

解:$|M\cup P \cup C| = 170+130+120-45-20-22+3=336$

2．多个集合的并集

[定理] 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是有限集合，则

$$|A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} |A_i \bigcap A_j|$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j} |A_i \bigcap A_j \bigcap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n|$$

证明：数学归纳法

De Morgan 定理

[定理] 若 A,B 是 U 的子集，则

$$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$$

$$\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$$

[定理] 若 A1,A2,…An 是 U 的子集，则

$$\overline{A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n} = \overline{A_1} \bigcap \overline{A_2} \bigcap \cdots \bigcap \overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n} = \overline{A_1} \bigcup \overline{A_2} \bigcup \cdots \bigcup \overline{A_n}$$

Sylvester 公式

[容斥原理] 给定集合N和性质$A_1, A_2, \cdots, A_n$，则

$$|\overline{A_1} \bigcap \overline{A_2} \bigcap \cdots \bigcap \overline{A_n}|$$

$$= |N| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} |A_i \bigcap A_j| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j} |A_i \bigcap A_j \bigcap A_k|$$

$$+ \cdots + (-1)^n |A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n|$$

有限制的排列

[例] 求 a,b,c,d,e,f 六个字母的全排列中不允许出现 ace 和 df 图象的排列数。

解：设 A 为 ace 作为一个元素出现的排列集，B 为 df 作为一个元素出现的排列集，则

$$\left.\begin{array}{l} |N|=6! \\ |A|=4! \\ |B|=5! \\ |A \cap B|=3! \end{array}\right\} \quad |\overline{A} \bigcap \overline{B}| = 6! - (5! + 4!) + 3! = 582$$

[例] 4 个 x、3 个 y、2 个 z 的全排列中，求不出现 xxxx、yyy、zz 图象的排列数。

解:所有出现 xxxx 图象的排列集合记为 A_1，出现 yyy 图象的排列集合记为 A_2，出现 zz 图象的排列集合记为 A_3，则

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1}\bigcap\overline{A_2}\bigcap\overline{A_3}| &= |N| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\
&\quad + (|A_1\bigcap A_2| + |A_1\bigcap A_3| + |A_2\bigcap A_3|) - |A_1\bigcap A_2\bigcap A_3| \\
&= P(9;4,3,2) - [P(6;1,3,2) + P(7;4,1,2) + P(8;4,3,1)] \\
&\quad + [P(4;1,1,2) + P(5;1,3,1) + P(6;4,1,1)] - P(3;1,1,1) \\
&= 1260 - (60 + 105 + 280) + (12 + 20 + 30) - 6 = 871
\end{aligned}
$$

Eratosthenes 筛法

[例] 求不超过 120 的素数的个数。

解：不超过 120 的合数必然是 2、3、5、7 的倍数，且不超过 120 的合数的因子不可能都超过 11。设 A*i* 为不超过 120 的数 *i* 的倍数集，*i*=2，3，5，7。

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_2}\bigcap\overline{A_3}\bigcap\overline{A_5}\bigcap\overline{A_7}| &= |N| \\
&- (|A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7|) \\
&+ (|A_2\bigcap A_3| + |A_2\bigcap A_5| + |A_2\bigcap A_7| + |A_3\bigcap A_5| + |A_3\bigcap A_7| + |A_5\bigcap A_7|) \\
&- (|A_2\bigcap A_3\bigcap A_5| + |A_2\bigcap A_3\bigcap A_7| + |A_2\bigcap A_5\bigcap A_7| + |A_3\bigcap A_5\bigcap A_7|) \\
&+ |A_2\bigcap A_3\bigcap A_5\bigcap A_7| \\
&= 120 - \left(\left\lfloor\frac{120}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{120}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{120}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{120}{7}\right\rfloor\right) \\
&+ \left(\left\lfloor\frac{120}{2\times 3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{120}{2\times 5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{120}{2\times 7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{120}{3\times 5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{120}{3\times 7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{120}{5\times 7}\right\rfloor\right) \\
&- \left(\left\lfloor\frac{120}{2\times 3\times 5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{120}{2\times 3\times 7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{120}{2\times 5\times 7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{120}{3\times 5\times 7}\right\rfloor\right) \\
&+ \left\lfloor\frac{120}{2\times 3\times 5\times 7}\right\rfloor \\
&= 27
\end{aligned}
$$

由于 2，3，5，7 是素数，1 不是素数，故所求的不超过 120 的素数个数为：27+4-1=30

欧拉函数 $\phi(n)$

[定理]欧拉函数$\phi(n)$是小于n且与n互素的正整数的个数,假设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则有

$$\phi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$$

证明：设A_i为1到n之间p_i的倍数的集合,$i=1,2,\cdots,k$,则

$$\begin{aligned}\phi(n)&=|\overline{A_1}\bigcap\overline{A_2}\bigcap\cdots\bigcap\overline{A_k}|\\&=n-\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j>i}\frac{n}{p_ip_j}-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j>i}\sum_{h>j}\frac{n}{p_ip_jp_h}+\cdots+(-1)^k\frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}\\&=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_k})\end{aligned}$$

错排问题-容斥原理

[例] 求整数 1,2,…,n 的全排列中所有 i 都不在第 i 个位置上的排列的个数，i=1,2,…,n。

解：设 A_i 表示 i 在第 i 个位置上的所有排列，则所求的排列数为：

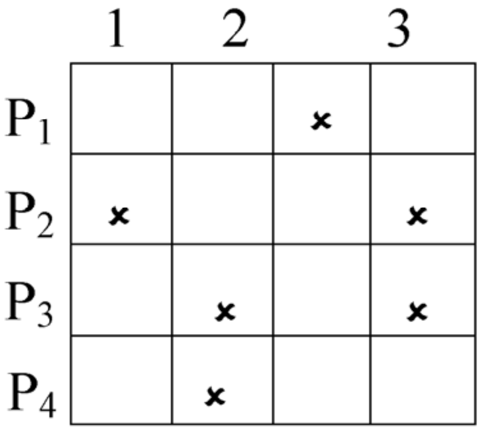
$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\bigcap\overline{A_2}\bigcap\cdots\bigcap\overline{A_n}|=|N| \quad & =n!\\-(|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|) \quad & -C(n,1)\cdot(n-1)!\\+(|A_1\bigcap A_2|+\cdots+|A_{n-1}\bigcap A_n|) \quad & +C(n,2)\cdot(n-2)!\\-\cdots \quad & -\cdots\\+(-1)^n|A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_n| \quad & +(-1)^nC(n,n)\end{aligned}$$

$$|\overline{A_1}\bigcap\overline{A_2}\bigcap\cdots\bigcap\overline{A_n}|=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)=D_n$$

有禁区的排列

[例]　对于整数 1,2,3,4 的全排列 P=P1 P2 P3 P4，规定 P1≠３，P２≠１、４， P３≠2、４， P4≠2。

问题可以转换为在有禁区的棋盘上放置车，使得每行每列有且只有一只车



2.2 棋盘多项式

将若干只车放置在一个 nxn 的棋盘 B 上，要求每行每列有且只有一个车，记 r_k(B)表示棋盘 B 上放置 k 只车的不同方案数，则称多项式

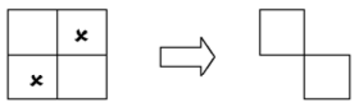
$$R(B)=\sum_{k\geq 0} r_k(B)x^k = r_0(B)+r_1(B)x+r_2(B)x^2+\cdots$$

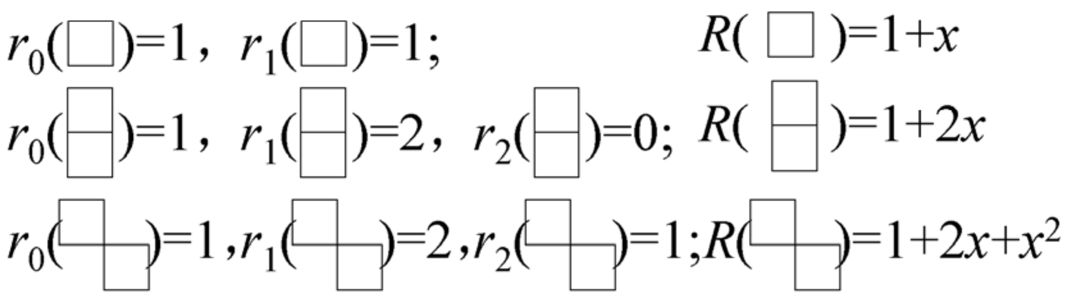
为棋盘 B 的棋盘多项式。

由于在 nxn 的棋盘 B 上最多可以放置 n 只车，因此当 k>n 时 r_k(B)=0，棋盘多项式 R(B)只有有限项。

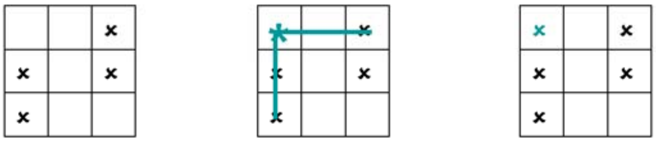
有禁区的布局

在棋盘 B 上放置车时，有的位置是禁区。下面画棋盘时省略了禁区部分。



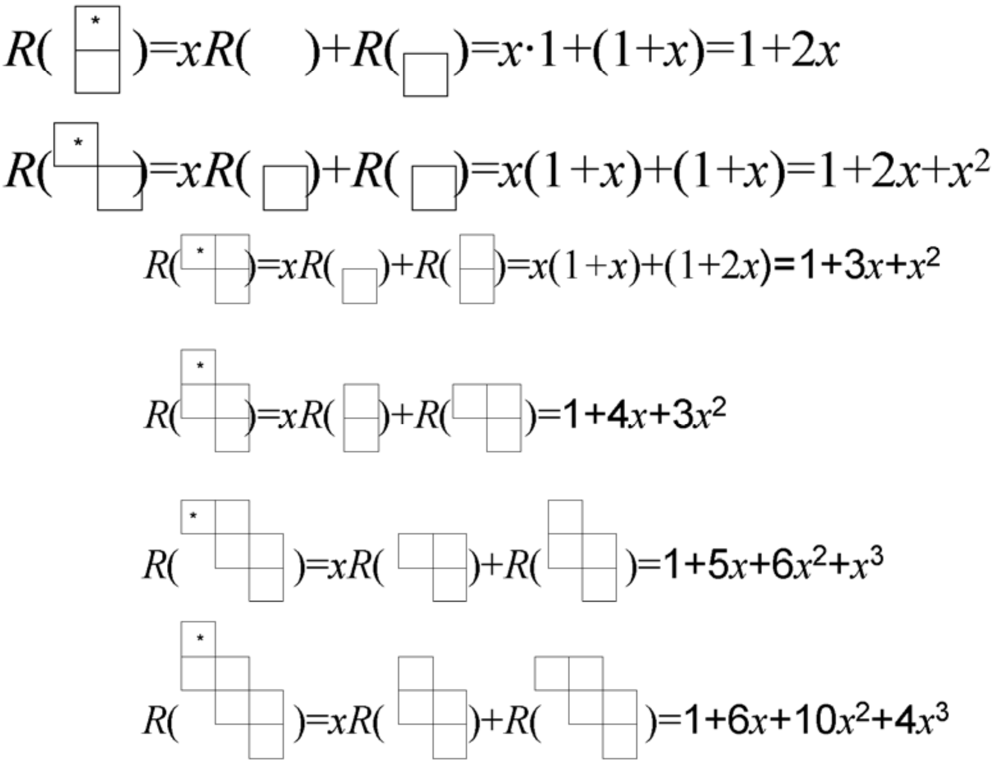


棋盘多项式的递推关系



B　　　　B_i　　　　B_e

$$r_k(B)=r_{k-1}(B_i)+r_k(B_e);\quad R(B)=xR(B_i)+R(B_e)$$



有禁区的布局数

[定理] 在 nxn 的棋盘上放置 n 只车，不同的方案数为

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\cdots\pm r_n$$

其中 ri 是有 i 只车布置到禁区部分的方案数。

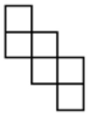
证明：令 Ai 表示第 i 只车放入第 i 行的禁区，则

$$\begin{aligned}
|\overline{A_1}\bigcap\overline{A_2}\bigcap\cdots\bigcap\overline{A_n}| = N \quad & = n! \\
-(|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|) \quad & -r_1(n-1)! \\
+(|A_1\bigcap A_2|+\cdots+|A_{n-1}\bigcap A_n|) \quad & +r_2(n-2)! \\
-\cdots \quad & -\cdots \\
\pm|A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_n| \quad & \pm r_n
\end{aligned}$$

任务分配

[例] G、L、W、Y 四位工人，A、B、C、D 四项任务。若 G 不能从事任务 B，L 不能从事任务 B、C，W 不能从事任务 C、D，Y 不能从事任务 D，则有多少种可行方案使得每人从事各自力所能及的一项工作？

解：每一种分配方案相当于右图所示的有禁区的排列，由于

$R($  $)=1+6x+10x2+4x3$

所求的排列数为： 4!-6*3!+10*2!-4*1!-0=4

	A	B	C	D
G		×		
L		×	×	
W			×	×
Y				×

错排问题-有禁区的排列

如图所示，不难求得禁区的棋盘多项式为$(1+x)n$

	1	2	3	4
1	×			
2		×		
3			×	
4				×

则错排的方案数为

$n!-C(n,1)(n-1)!+C(n,2)(n-2)!-\dots\pm C(n,n)$

3 广义容斥原理

3.1 广义容斥原理

α (m)

给定集合N和性质$A_1, A_2, \cdots, A_n$，令$\alpha(0) = |N|$,

$$\alpha(1) = \sum_{i=1}^{n} |A_i|,$$

$$\alpha(2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \bigcap A_j|$$

$$\alpha(3) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \bigcap A_j \bigcap A_k|$$

…

$$\alpha(n) = |A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n|$$

则$\alpha(m)$计数了具有$m+k$个性质的元素C_m^{m+k}次。

β (m)

[广义容斥原理] 给定集合N和性质$A_1, A_2, \cdots, A_n$，令$\beta(m)$表示N中恰有m个性质的元素个数，则

$$\beta(m) = \alpha(m) - C_m^{m+1}\alpha(m+1) + C_m^{m+2}\alpha(m+2) - \cdots + (-1)^{n-m} C_m^n \alpha(n)$$

证明:1)少于m个性质的元素;2)恰有m个性质的元素;3)多于m个性质的元素,假设是$m+k$个,则在项$(-1)^i C_m^{m+i}\alpha(m+i)$中计算$(-1)^i C_m^{m+i} C_{m+i}^{m+k}$

次。根据恒等式$C_k^n C_r^k = C_r^n C_{k-r}^{n-k}$,

$$(-1)^i C_m^{m+i} C_{m+i}^{m+k} = (-1)^i C_m^{m+k} C_i^k,$$

于是具有$m+k$个性质的元素被计数的总次数是

$$C_m^{m+k} C_0^k - C_m^{m+k} C_1^k + C_m^{m+k} C_2^k - \cdots \pm C_m^{m+k} C_k^k = C_m^{m+k}(C_0^k - C_1^k + C_2^k - \cdots \pm C_k^k)$$

推论：$\beta(0) = \alpha(0) - \alpha(1) + \alpha(2) - \cdots + (-1)^n \alpha(n)$

3.2 广义容斥原理的应用

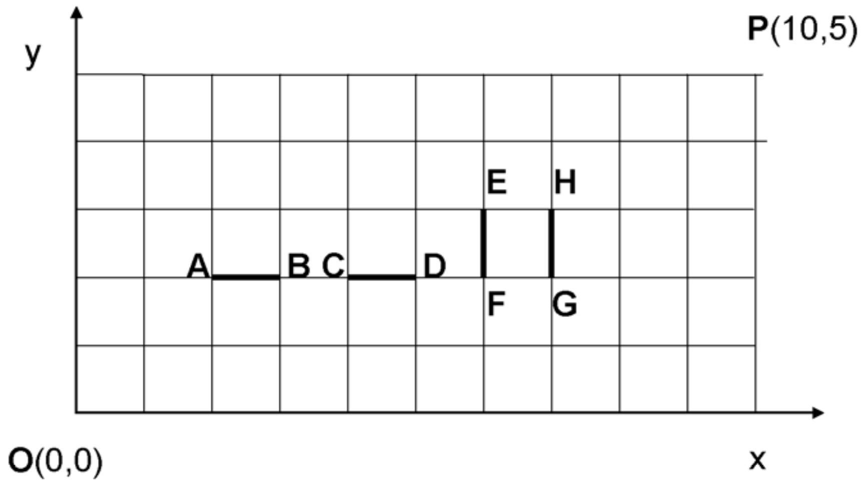
[例] 某校有 12 个教师，已知教数学的有 8 位，教物理的有 6 位，教化学的 5 位；教数理的 5 位，教数化的 4 位，教理化的 3 位；教数理化的 3 位。问教其他课的有几位？只教一门课的有几位？只教两门课的有几位？

解：令教数学的教师属于 A_1，教物理的属于 A_2，教化学的属于 A_3。则 α (0)=12，

α (1)= ＝| A_1 |+| A_2|+| A_3 |＝8+6+5＝19，

$\alpha(2)= =|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|=12$，
$\alpha(3)= =|A_1\cap A_2\cap A_3|=3$，
$\beta(0)= \alpha(0)-\alpha(1)+\alpha(2)-\alpha(3)= 12-19+12-3=2$
$\beta(1)= \alpha(1)-2\alpha(2)+3\alpha(3)= 19-2\cdot 12+3\cdot 3=4$
$\beta(2)=\alpha(2)-3\alpha(3)= 12-3\cdot 3=3$

[例] 求从 O 点到 P 点恰好经过 AB,CD,EF,GH 中任何两条路径的路径数。



解：令 A1 表示从 O 点到 P 点经过 AB 的路径， A2 表示从 O 点到 P 点经过 CD 的路径，A3 表示从 O 点到 P 点经过 EF 的路径，A4 表示从 O 点到 P 点经过 GH 的路径，则

$$\alpha(2)=|A_1\bigcap A_2|+|A_1\bigcap A_3|+|A_1\bigcap A_4|+|A_2\bigcap A_3|+|A_2\bigcap A_4|+|A_3\bigcap A_4|$$
$$=C_2^4C_3^8+C_2^4C_2^6+C_2^4C_2^5+C_2^6C_2^6+C_2^6C_5^5+0=861$$
$$\alpha(3)=|A_1\bigcap A_2\bigcap A_3|+|A_1\bigcap A_2\bigcap A_4|+|A_1\bigcap A_3\bigcap A_4|+|A_2\bigcap A_3\bigcap A_4|$$
$$=C_2^4C_2^6+C_2^4C_2^5+0+0=150$$
$$\alpha(4)=|A_1\bigcap A_2\bigcap A_3\bigcap A_4|=0$$

$$\beta(2)=\alpha(2)-3\alpha(3)+6\alpha(4)=861-3\cdot 150+6\cdot 0=411$$

[例] $\binom{n-m}{n-k}=\binom{m}{0}\binom{n}{k}-\binom{m}{1}\binom{n-1}{k}+\binom{m}{2}\binom{n-2}{k}-\cdots\pm\binom{m}{m}\binom{n-m}{k}$

证明：等式左边是 $C(n\text{-}m,k\text{-}m)$，即从$\{1,2,\cdots,n\}$中取出 k 个数，其中必定包含$\{1,2,...,m\}$的方案数。等式右边第一项是从$\{1,2,\cdots,n\}$中取出 k 个数的方案数，命 Ai 表示选取的 k 个数中不包含 i，…

线性方程的整数解数目

[例] 求满足线性方程

$$x_1+x_2+x_3=15,\quad x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0$$

的整数解的数目。

解：这个方程的任意一个整数解都可以看作是 15 个无区别的球放进 3 个有标志的盒子，每盒个数不限。因此解的个数为 $C(3+15-1,15)=C(15+2,2)=136$

线性方程的整数解数目（2）

[例] 求满足线性方程

$$x_1+x_2+x_3=15,\quad x_1\geqslant 6, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0$$

的整数解的数目。

解：可以用换元法求解，命 $y_1=x_1-6, y_2=x_2, y_3=x_3$，则问题变为求满足线性方程

$$y_1+y_2+y_3=9,\quad y_1\geqslant 0, y_2\geqslant 0, y_3\geqslant 0$$

的整数解的数目，即 $C(9+2,2)=55$

[例] 求满足线性方程

$$x_1+x_2+x_3=15,\quad 0\leqslant x_1\leqslant 5, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0$$

的整数解的数目。

解：令 N 为线性方程的全体非负整数解，A1 为其中 $x_1\geqslant 6$ 的解,则

$$\alpha(0)=|N|=C(15+2,2)=136$$
$$\alpha(1)=|A1|=C(9+2,2)=55$$
$$\beta(0)=\alpha(0)-\alpha(1)=136-55=81$$

多重集的 r-组合

[例] 给定多重集$\{5\cdot x, 6\cdot y, 7\cdot z\}$，求从中取 15 个元素的组合数。

解：令 N 为从$\{x,y,z\}$ 选出 15 个元素的全体可重复组合，A1 为 N 中至少 6 个 x 的组合，A2 为 N 中至少 7 个 y 的组合， A3 为 N 中至少 8 个 z 的组合，则

$$\alpha(1)=|A1|+|A2|+|A3|=C(11,2)+C(10,2)+C(9,2)=136,$$
$$\alpha(2)=|A1\cap A2|+|A1\cap A3|+|A2\cap A3|=10,$$
$$\alpha(3)==|A1\cap A2\cap A3|=0$$
$$\beta(0)=\alpha(0)-\alpha(1)+\alpha(2)-\alpha(3)=136-136+10-0=10$$

这个问题实际上也就是求满足线性方程：$x_1+x_2+x_3=15,\quad 0\leqslant x_1\leqslant 5, 0\leqslant x_2\leqslant 6, 0\leqslant x_3\leqslant 7$ 的整数解的数目。

$S(n,m)$ 的计算公式

n个有标志的球放进m个有区别的盒子,令A_i表示第i个盒子为空的事件，则

$$\alpha(0)=|N|=m^n,\alpha(1)=\sum_{i=1}^{m}|A_i|=C_1^m(m-1)^n,\alpha(2)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j>i}|A_i\bigcap A_j|=C_2^m(m-2)^n,$$

$$\alpha(3)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\bigcap A_j\bigcap A_k|=C_3^m(m-3)^n,\cdots$$

因此，n个有标志的球放进m个有区别的盒子，无一空盒的方案数为

$$\begin{aligned}\beta(0)&=\alpha(0)-\alpha(1)+\alpha(2)-\cdots+(-1)^n\alpha(n)\\&=C_0^m(m-0)^n-C_1^m(m-1)^n+C_2^m(m-2)^n-\cdots+(-1)^mC_m^m(m-m)^n\\&=\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_k^m(m-k)^n\end{aligned}$$

注意到n个有标志的球放进m个有区别的盒子无一空盒的方案数为$m!S(n,m)$

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_k^m(m-k)^n$$

错排问题的推广

[定理] $N=\{1,2,\cdots,n\}$，从N中取r个进行排列得$a_1a_2\cdots a_r$,要求其中有k个数满足$a_i=i$，即有$r-k$个数是错排，这样的排列数用$D(n,r,k)$来表示，则当$n\geq r\geq k$时有

$$D(n,r,k)=\frac{C_k^r}{(n-r)!}\sum_{i=0}^{r-k}(-1)^iC_i^{r-k}(n-k-i)!$$

证明：令A_i表示所有满足$a_i=i$的排列,则$\alpha(t)$对有t个数未错排的排列计数,因此

$$\alpha(t)=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_t\leq r}|A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap\cdots\bigcap A_{i_t}|=C_t^rC_{r-t}^{n-t}(r-t)!$$

所求为$\beta(k)$，注意这里性质的个数是r个

$$\begin{aligned}\beta(k)&=\alpha(k)-C_k^{k+1}\alpha(k+1)+C_k^{k+2}\alpha(k+2)-\cdots+(-1)^{r-k}C_k^r\alpha(r)\\&=\sum_{i=0}^{r-k}(-1)^iC_k^{k+i}\alpha(k+i)=\frac{C_k^r}{(n-r)!}\sum_{i=0}^{r-k}(-1)^iC_i^{r-k}(n-k-i)!\end{aligned}$$

不相邻的组合

不相邻的组合是指从 $A=\{1,2,\cdots,n\}$中取 r 个，其中不存在 $i,i+1$ 两个相邻的数同时出现于一个组合中的组合，例如不能出现$\{1,2,5\}$

[定理] 从 $A=\{1,2,\cdots,n\}$中取 r 个作不相邻的组合，其组合数为 $C(n-r+1,r)$

证明:从 $A=\{1,2,\cdots,n\}$中取 r 个作不相邻的组合与从 $A'=\{1,2,\cdots,n-r+1\}$中取 r 个作组合一一对应

$$b1,b2,b3,\cdots,br \quad \leftrightarrow b1,b2\text{-}1,b3\text{-}2,\cdots,br\text{-}r+1$$

[定理] 假定数 n 个顶点沿一圆周排列，则从其中选取 k 个不相邻顶点的方法数是 $n/k\cdot C(n\text{-}k\text{-}1,k\text{-}1)$

证明:对于任意一个顶点 A，先取 A ，然后再从不和 A 相邻的 n-3 个其他顶点中取 k-1 个不相邻顶点，显然可得到符合定理要求的组合，这种组合的个数为 $C(\,(n\text{-}3)\text{-}(k\text{-}1)+1,\,k\text{-}1\,)=C(n\text{-}k\text{-}1,k\text{-}1)$。

注意到一共有 n 个顶点，而且在每个组合中有 k 个元素，即可完成证明。

n 对夫妻问题

有 n 对夫妻围一圆桌而坐，则有多少种方案使男女交错而又避免夫妻相邻？

解：先让 n 位妻子围桌而坐，每两个人之间留一个空位，并按顺时针给予 1 到 n 的编号，然后让丈夫找空位坐下，令性质

A1：丈夫 1 坐在妻子 1 的右边

A2：丈夫 1 坐在妻子 1 的左边

A3：丈夫 2 坐在妻子 2 的右边

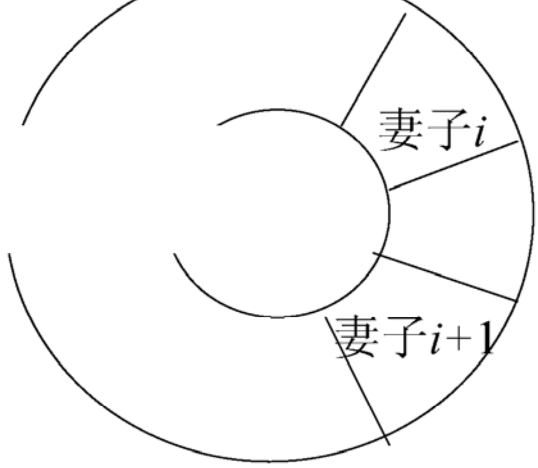
A4：丈夫 2 坐在妻子 2 的左边

...

An：丈夫 n 坐在妻子 n 的右边

A2n：丈夫 n 坐在妻子 n 的左边

显然 Ai 和 Ai+1 不能同时成立，注意 i=1,2,⋯,2n



因此，当$n<k\le 2n$时，有$|A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap\cdots\bigcap A_{i_k}|=0$,

$$\alpha(k)=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le 2n}|A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap\cdots\bigcap A_{i_k}|=0$$

当$1\le k\le n$时，

$$\alpha(k)=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le 2n}|A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap\cdots\bigcap A_{i_k}|=\frac{2n}{k}C_{k-1}^{2n-k-1}(n-k)!$$

由广义容斥原理可得

$$\beta(k)=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}C_k^i\alpha(i)=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}C_k^i\frac{2n}{i}C_{i-1}^{2n-i-1}(n-i)!$$

最终

$$\beta(0)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{2n}{i}C_{i-1}^{2n-i-1}(n-i)!=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{2n}{2n-i}C_i^{2n-i}(n-i)!$$

4 MÖbius 反演

广义容斥原理的另一个证明

$\alpha(m)$计数了具有$m+k$个性质的元素C_m^{m+k}次,

$$\begin{cases}\alpha(0)=\beta(0)+\beta(1)+\beta(2)+\cdots+\beta(n)\\ \alpha(1)=C_1^1\beta(1)+C_1^2\beta(2)+\cdots+C_1^n\beta(n)\\ \alpha(2)=C_2^2\beta(2)+\cdots+C_2^n\beta(n)\\ \cdots\\ \alpha(n)=C_n^n\beta(n)\end{cases}$$

解得:$\Rightarrow$

$$\begin{cases}\beta(0)=\alpha(0)-\alpha(1)+\alpha(2)-\cdots\pm\alpha(n)\\ \beta(1)=C_1^1\alpha(1)-C_1^2\alpha(2)+\cdots\mp C_1^n\alpha(n)\\ \beta(2)=C_2^2\alpha(2)-\cdots\pm C_2^n\alpha(n)\\ \cdots\\ \beta(n)=C_n^n\alpha(n)\end{cases}$$

4.1 反演

$$\alpha(m)=\sum_{k=m}^{n}C_m^k\beta(k)\Leftrightarrow\beta(m)=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}C_m^k\alpha(k)$$

若$\{a_n\}$可用$\{b_n\}$ 表示，则反演是将$\{b_n\}$用$\{a_n\}$表示

4.2 二项式反演

[二项式反演公式] $a_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_k^n b_k \Rightarrow b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_k^n a_k$

证明：可以证明

$$\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_k^n\mathrm{C}_i^k=\begin{cases}0, & i<n\\ 1, & i=n\end{cases}$$

则

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_k^n a_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_k^n\left(\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_i^k b_i\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_k^n\mathrm{C}_i^k\right)b_i=b_n$$

错排问题-二项式反演公式

n个元素的排列有$n!$个,恰有k个元素错排的排列有$C_{n-k}^n D_k$个,故

$$\sum_{k=0}^{n}C_k^n D_k=n!$$

根据二项式反演公式,

$$D_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_k^n k!=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}=n!\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{1}{r!}$$

4.3 MÖbius 反演

MÖbius 函数

d为正整数，莫比乌斯函数$\mu(d)$定义为

$$\mu(d)=\begin{cases}1 & 若 d=1 \\ (-1)^k & 若 d=p_1p_2\cdots p_k, p_i 为互异素数 \\ 0 & 其他\end{cases}$$

例如因为$30=2\cdot3\cdot5$，$\mu(30)=(-1)^3$。又因为$12=2^2\cdot3$，$\mu(12)=0$。

[定理]对于任意正整数n

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1 & 若 n=1 \\ 0 & 若 n>1\end{cases}$$

证明：$n=1$时显然。当$n>1$时，设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}, n'=p_1p_2\cdots p_k$,则根据$\mu(d)$的定义,$d$是$n$但$d$不是$n'$的因素时$\mu(d)=0$,因此可得

$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|n'}\mu(d)$，最终$\sum_{d|n'}\mu(d)=1+\sum_{i=1}^{k}C_i^k(-1)^i=\sum_{i=0}^{k}C_i^k(-1)^i=0$

[莫比乌斯反演公式] n为正整数，

$$f(n)=\sum_{d|n}g(d) \quad \Rightarrow \quad g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f(\frac{n}{d})$$

证明：$\sum_{d|n}\mu(d)f(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{d'|\frac{n}{d}}g(d')=\sum_{d'|n}g(d')\sum_{d|\frac{n}{d'}}\mu(d)=g(n)$

最后一步是因为当$d'=n$时,$\frac{n}{d'}=1$,这时可得到一项$g(n)$。除此之外，

只要$d'<n$，就有$\frac{n}{d'}>1$，从而$\sum_{d|\frac{n}{d'}}\mu(d)=0$

欧拉函数的又一种计算方法

[定理] $\phi(n)=n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$

证明：设$N=\{1,2,\cdots,n\}$,将N中的数分类,$M_d=\{m\in N \mid (m,n)=d\}$,
则$N=\bigcup_{d|n}M_d$

因为$m=m_1d, n=n_1d, (m_1,n_1)=1$,所以$|M_d|=\phi(n_1)=\phi(\frac{n}{d})$,

$n=|N|=\sum_{d|n}M_d=\sum_{d|n}\phi(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}\phi(d)$

令$f(n)=n, g(n)=\phi(n)$,根据莫比乌斯反演公式,定理得证。

可重复圆排列

从 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中取 r 个构成的一个圆排列，如果不允许重复选取，则圆排列的个数为 $P(n,r)/r$，因为每个圆排列对应 r 个线排列。如果允许重复选取，则未必每个圆排列对应 r 个线排列。

⊙aaaa

⊙bbbb

⊙aaab,aaba,abaa,baaa

⊙bbba,bbab,babb,abbb

⊙aabb,abba,bbaa,baab

⊙abab,baba

可重复圆排列的周期

[定义] 若一个圆排列可由一个长度为 d 的线排列重复若干次形成，则这样的 d 中最小者称为该圆排列的**周期**。

[引理 1] 周期为 d 的圆排列对应于 d 个线排列

[引理 2] 从 r 个元素中允许重复地选取 n 个构成一个圆排列，假设其中周期为 d 的圆排列有 $Mr(d)$个，则

$$\sum_{d|n} dM_r(d) = r^n$$

可重复圆排列的计数

[引理3] r个元素的可重复圆排列中，周期为n的$n-$圆排列的个数是

$$M_r(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)r^{\frac{n}{d}}$$

[定理] 从r个元素中可重复地取出n个元素,得到的圆排列数是

$$\mathrm{T}_r(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\phi(d)r^{\frac{n}{d}}$$

证明：$\mathrm{T}_r(n) = \sum_{d|n} M_r(d) = \sum_{d|n}\frac{1}{d}\sum_{d'|d}\mu(d')r^{\frac{d}{d'}} = \sum_{d'|n}\sum_{d'|d|n}\frac{1}{d}\mu(d')r^{\frac{d}{d'}}$

$$= \sum_{d'|n}\sum_{k|\frac{n}{d'}}\frac{1}{kd'}\mu(d')r^k = \sum_{k|n}\sum_{d'|\frac{n}{k}}\frac{1}{kd'}\mu(d')r^k = \frac{1}{n}\sum_{k|n}r^k\sum_{d'|\frac{n}{k}}\frac{\mu(d')}{d'}\frac{n}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k|n}\phi\left(\frac{n}{k}\right)r^k$$

偏序集上的 MÖbius 反演

- 柯召，魏万迪．组合论(上册)．科学出版社，1981．

偏序集上的MÖbius反演 → 广义的容斥原理

偏序集上的MÖbius反演 → 经典MÖbius反演

5 容斥原理与母函数

1．广义容斥原理 – 普通型母函数

广义容斥原理的证明

$$\alpha(m)=\sum_{k=m}^{n}\mathrm{C}_m^k\beta(k)\Leftrightarrow\beta(m)=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\mathrm{C}_m^k\alpha(k)$$

$$\alpha(m)=\sum_{k}\mathrm{C}_m^k\beta(k)$$

$$A(x)=\sum_{m}\sum_{k}\mathrm{C}_m^k\beta(k)x^m=\sum_{k}\beta(k)\sum_{m}\mathrm{C}_m^k x^m=\sum_{k}\beta(k)(x+1)^k=B(x+1)$$

$$B(x)=A(x-1)$$

$$A(x-1)=\sum_{k}\alpha(k)(x-1)^k=\sum_{k}\alpha(k)\sum_{m}\mathrm{C}_m^k x^m(-1)^{k-m}=\sum_{m}\sum_{k}(-1)^{k-m}\mathrm{C}_m^k\alpha(k)x^m$$

$$\beta(m)=\sum_{k}(-1)^{k-m}\mathrm{C}_m^k\alpha(k)$$

2．二项式反演公式 -指数型母函数

二项式反演公式的证明

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_k^n b_k\Leftrightarrow b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_k^n a_k$$

$$A(x)=\sum_{n\ge0}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_k^n b_k\right)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n\ge0}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{b_k x^k}{k!}\right)\left(\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right)=\sum_{k\ge0}\frac{b_k x^k}{k!}\sum_{n\ge k}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\sum_{k\ge0}\frac{b_k x^k}{k!}\sum_{i\ge0}\frac{x^i}{i!}=e^x B(x)$$

$$B(x)=e^{-x}A(x)=\sum_{k\ge0}\frac{a_k x^k}{k!}\sum_{i\ge0}\frac{(-1)^i x^i}{i!}=\sum_{k\ge0}\frac{a_k x^k}{k!}\sum_{n\ge k}\frac{(-1)^{n-k}x^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\sum_{n\ge0}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{b_k x^k}{k!}\right)\left(\frac{(-1)^{n-k}x^{n-k}}{(n-k)!}\right)=\sum_{n\ge0}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_k^n b_k\right)\frac{x^n}{n!}$$

3．MÖbius 反演公式 -狄利克雷型母函数

MÖbius 反演公式的证明

- 王天明译。发生函数论。清华大学出版社。2003