第 4 讲 递推关系

何英华
天津大学计算机科学与技术学院
（hyh@tju.edu.cn，http://202.113.12.9/~hyh）

1 引言

求递推关系是解决计数问题的常用方法。

错排问题是组合学发展史上的一个重要问题，对此问题的解决引入了组合学中最基本的方法——递归法。

1．伯努利-欧拉装错信封问题：

某人写了 n 封信，并且在 n 个信封上写下了对应的地址。问：把所有的信装错信封的情况共有多少种？

2．“相遇”纸牌游戏，规则如下：

发牌者洗好 A——K 的 13 张牌后，每次发牌一张，发第一张牌时说“1”，发第二张牌时说“2”，如此下去。发牌结束后开始翻牌，如果翻过后牌的点数与发牌时所说的正好一致，那么发牌者获胜。例如，若发第 3 张牌翻过来其点数正好是“3”或第 11 张正好是“J”，即发牌者获胜。

3．假设有 n 个字母的排列，abcde….，把这 n 个字母重新排列后，有多少种这样的排列，使得每个字母都不在其原来的位置上？

定义：令 $\{a_k\}(1 \le k \le n)$ 是 $\{n\}$ 的排列，如果每个元素都不在其原始位置上，即 $a_1 \ne 1$，$a_2 \ne 2$，…，$a_n \ne n$，那么这种排列称为错位排。则有通项公式以及递推关系：

$$D_n = n!\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{r!}$$

$$D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}], D_0 = 1, D_1 = 0$$

D_n 的通项表达式由 Nikolaus Bernoulli（1623-1708）和 P.R.de Montmort（1678-1719）用递归法得出。错排问题是组合计数史上使用递归方法的一个经典事例。

组合学中限位排列问题，孟特马特因解决此游戏中获胜的概率而在组合学的历史上得以留名。

欧拉对此问题曾发生过兴趣，并在与他人毫无联系的情况下解出了这个问题，他称之为“组合理论的一个妙题”[①]。

欧拉提出的问题可这样叙述：

假定有 n 个字母的排列，$abcde$ ……，把这 n 个字母重新排列后，有多少种这样的排列，使得每个字母都不在其原来的位置上？

此问题与孟特马特的纸牌问题略有不同，若把孟特马特的 1－13 的 13 张纸牌对应记为 a，b，c，d，…，m，那么欧拉的排列是恰好没有那种相遇情况出现的排列方法数。

欧拉指出，如果对字母的最终排列位置不加限制，则共有 $n!$种排列，现在是每个字母重排后都不在其原来位置上，他给出实例来说明这种错位排列，并引用符号$\Pi(n)$表示此排列数。

n=1，只有字母 a，则$\Pi(1)=0$；

n=2，对字母 ab，重排后 a，b 皆不在其原来位置上的只有一种情况，ba，故$\Pi(2)=1$；

n=3，对 abc，重排后符合要求的有二种，bca 和 cab，故$\Pi(3)=2$；

类似地，我们可以写出 n=4，5 的所有排列，然后找出符合条件的排列，$\Pi(4)=9$，$\Pi(5)=44$。对于 n=6，n=12 呢？12 个字母的全部排列有 12!=479,001,600，我们不可能把它们全部写出，那么如何确定它的错排数？

对此问题，欧拉首先给出了一个计算该值的以下递推公式及其证明。对 $n\geqslant 3$，

$$\Pi(n)=(n-1)[\Pi(n-1)+\Pi(n-2)], \tag{4.4.3}$$

天才的数学思维使他注意到：

$$\Pi(2)=1=2\cdot 0+1=2\Pi(1)+1，\ \Pi(3)=2=3\cdot 1-1=3\Pi(2)-1$$

$$\Pi(4)=9=4\cdot 2+1=4\Pi(3)+1，\ \Pi(5)=44=5\cdot 9-1=5\Pi(4)-1$$

$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots$$

$$\Pi(n)=n\Pi(n-1)+(-1)^n，(n\geqslant 2) \tag{4.4.4}$$

欧拉称式（4.4.4）是一个“漂亮的关系式”[②]，与式（4.4.3）相比，计算任意大于 2 的 n 个不同元素的错排数，只要算出 $n-1$ 个的错排数即可，而无需再算出 $n-2$ 个的。

欧拉对上面两个递推公式并不满意，能否找到$\Pi(n)$的一个只与 n 有关的表达式？经过努力，他的这一想法得以实现。根据式（4.4.4）用归纳法得如下公式：

$$\Pi(n)=n![1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}]，(\ n\geqslant 1)$$

由这一公式，可以容易地计算出任意 n 个物体的错排数。

使欧拉更为兴奋的是他发现了 n 个物体的错排在其全排列中出现的概率（记作 p_n）与常数 e 有关。

$$p_n=\frac{\Pi(n)}{n!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots，\quad 而\quad \lim_{n\to\infty}p_n=e^{-1}=0.3678794412$$

常数 e 在数学计算中应用非常普遍，在许多数学计算中常意外地出现。

对经典组合学中的错位排列问题，欧拉至此给出了完整的解决。他引入的递推方法也成为解决组合问题的一种有效手段。

错位排列问题后来发展为限位排列问题，如一个排列 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6\cdots a_{n-1}a_n$，对其进行重排后，使得新的排列中不出现 a_1a_2，a_2a_3，…，$a_{n-1}a_n$ 的排列数是多少？

限位排列的一个经典问题 “夫妻入座问题（problème des ménages）”：

晚宴上，n 对夫妻按以下规则坐入 $2n$ 个座位：男女相间，夫妇不邻，那么这样的入座方法数是多少？

英国数学家贝尔（Rouse Ball）谈及该题时说：“解决这个题决非易事[①]。”

这一问题是错位排列问题解决的几十年后，凯莱（1878 年）[②]和拉卡斯（1891 年）等提出并给予解决。有趣的是，斯考伯（W.Schöbe，1942）和卡普兰斯基（I.Kaplansky，1943）分别证明了当 n 无穷大时，这种排列出现的概率是 e^{-2}。[③]

错排问题后来发展为限位排列。比如在 $S=\{n\}$的排列中不出现 12，23，34，…（$n-1$）n 的排列是一种限位排列，若记此限位排列数为 Q_n，则有递推公式 $Q_n=D_n+D_{n-1}$；$Q_1=0$，$Q_2=1$。

“夫妻入座问题”这一问题直到现在仍为一些学者所研究。而限位排列问题是比错位排列的条件更灵活更复杂的一类排列问题。

1 递推关系

定义：给定一个数的序列$H(0)$，H(1)，…，H(n)，…，若存在整数n_0，使当$n \ge n_0$时，可以用等号（或大于号，小于号）将H(n)与其前面的某些项$H(i)(0 \le i < n)$联系起来，这样的式子就叫做递推关系。

定义 设k是给定的正整数，若数列f(0)，f(1)，…，f(n)，…的相邻k+1项之间满足关系

$$f(n) = c_1(n)f(n-1) + c_2(n)f(n-2) + \ldots + c_k(n)f(n-k) + g(n) \qquad (1)$$

对$n \ge k$成立，其中$c_k(n) \ne 0$，则称该关系为$\{f(n)\}$的k阶线性递推关系。如果$c_1(n)$，$c_2(n)$，…，$c_k(n)$都是常数，则称之为k阶线性常系数递推关系。如果$g(n) = 0$，则称之为齐次的。

如果有一个数列代入递推关系（1），使得其对任何$n \ge k$都成立，则称这个数列是递推关系的解。

线性常系数齐次递推关系的一般形式为：

$$f(n) = c_1 f(n-1) + c_2 f(n-2) + \ldots + c_k f(n-k), (n \ge k, c_k \ne 0) \qquad (2)$$

定义：方程

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

叫做递推关系（2）的特征方程。它的k个根q_1，q_2，…，q_k（可能有重根）叫做该递推关系的特征根，其中，q_i（=1，2，…，k）是复数。

2 解递推关系

$$\begin{cases} \text{母函数法} \\ \text{迭代法} \\ \text{换元法} \\ \text{特征根法} \\ \text{数学归纳法} \\ \text{相加消去法} \\ \text{差分法} \end{cases}$$

2.1 一阶递推关系

1．迭代法

[例] $a_n = x_n a_{n-1}, (n > 0; a_0 = 1)$

解：$a_n = \prod_{1 \le k \le n} x_k$

[例] $a_n = a_{n-1} + y_n, (n > 0; a_0 = 0)$

解：$a_n = \sum_{1 \le k \le n} y_k$

2．换元法

[例]　$na_n = (n-2)a_{n-1} + 2, (n > 1; a_1 = 1)$

解：$n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)a_{n-1} + 2(n-1)$

设$b_n = n(n-1)a_n$

所以$b_n = b_{n-1} + 2(n-1)$

$b_n = n(n-1)$

$a_n = 1$

[例]　$a_n = 2a_{n-1} + 1, (n > 1; a_1 = 1)$

解：$a_n = 2a_{n-1} + 2 - 1$

$a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$

设$\mathrm{b_n} = a_n + 1$

$\mathrm{b_n} = 2\mathrm{b_{n-1}}$

$\mathrm{a_n} = 2^{\mathrm{n}} - 1$

一阶线性递推关系的求解

[定理] 递推关系

$$a_n = x_n a_{n-1} + y_n \qquad (n > 0; a_0 = 0)$$

的解是

$$a_n = y_n + \sum_{1 \le k < n} y_k x_{k+1} x_{k+2} \cdots x_n$$

2.2 高阶递推关系

特征根法求解高阶线性常系数齐次递推关系和高阶线性常系数非齐次递推关系。

1．高阶线性常系数齐次递推关系

[定理] 设$r_1, r_2, \cdots, r_s$是线性常系数齐次递推关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0$$

的不同的特征根，并设h_i是r_i的重根数,则

$$\begin{aligned} a_n &= (b_{1,0} + b_{1,1}n + \cdots + b_{1,h_1-1}n^{h_1-1})r_1^n \\ &\quad + (b_{2,0} + b_{2,1}n + \cdots + b_{2,h_2-1}n^{h_2-1})r_2^n \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + (b_{s,0} + b_{s,1}n + \cdots + b_{s,h_s-1}n^{h_s-1})r_s^n \end{aligned}$$

[例] $a_n + a_{n-1} - 11a_{n-2} - 13a_{n-3} + 26a_{n-4} + 20a_{n-5} - 24a_{n-6} = 0$

$$a_0 = 7, a_1 = 4, a_2 = 37, a_3 = 32, a_4 = 163, a_5 = 646$$

解：$K(x) = x^6 + x^5 - 11x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 20x - 24 = (x-1)^2(x-3)(x+2)^3$

$$a_n = c_1 + c_2 n + c_3 3^n + c_4(-2)^n + c_5 n(-2)^n + c_6 n^2(-2)^n$$

$$\begin{cases} c_1 + c_3 + c_4 = 7 \\ c_1 + c_2 + 3c_3 - 2c_4 - 2c_5 - 2c_6 = 4 \\ c_1 + 2c_2 + 9c_3 + 4c_4 + 8c_5 + 16c_6 = 37 \\ c_1 + 3c_2 + 27c_3 - 8c_4 - 24c_5 - 72c_6 = 32 \\ c_1 + 4c_2 + 81c_3 + 16c_4 + 64c_5 + 256c_6 = 163 \\ c_1 + 5c_2 + 243c_3 - 32c_4 - 160c_5 - 800c_6 = 646 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 5 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 2 \\ c_4 = 0 \\ c_5 = 4 \\ c_6 = -1 \end{cases}$$

$$a_n = 5 - n + 2 \cdot 3^n + 4n(-2)^n - n^2(-2)^n$$

2．高阶线性常系数非齐次递推关系

[定理] 若$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$和$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots$都是非齐次递推关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = b_n$$

的解，则$\alpha_0 - \beta_0, \alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \cdots$是齐次递推关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0$$

的解。

[定理] 若$b(n)$是q次多项式，r是线性非齐次递推关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = r^n b(n)$$

的m重特征根，则该递推关系的特解有以下形式

$$r^n(k_1 n^m + k_2 n^{m+1} + \cdots + k_q n^{m+q})$$

其中$k_1, k_2, \cdots, k_q$是常数。若r不是特征根,则令$m = 0$

[例] $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 6n^2 (a_0 = 6, a_1 = 7)$

解：$K(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

因为$r=1, b(n)=6n^2$,所以$m=1, q=2$,特解$\alpha=k_1 n+k_2 n^2+k_3 n^3$

将α代入递推关系求得$k_1=-49, k_2=-15, k_3=-2$

$a_n=c_1+c_2 2^n-49n-15n^2-2n^3$

根据初始条件，求得$c_1=-61, c_2=67$

$a_n=67\cdot 2^n-61-49n-15n^2-2n^3$

2.3 其他解法

[例]　$a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$　$(n>1; a_0=1, a_1=2)$

解：采用换元法，令 $b_n=\lg(a_n)$得 $b_n=1/2(b_{n-1}+b_{n-2})$（2 阶线性常系数齐次递推关系）
$n>1$; $b_0=0$, $b_1=1$

2.3.1 母函数法

解线性常系数齐次递推关系

[定理]如果a_n对所有$n\geq k$满足递推式

$$a_n+c_1 a_{n-1}+c_2 a_{n-2}+\cdots+c_k a_{n-k}=0$$

则母函数$A(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$是一个有理函数,$A(x)=f(x)/D(x)$,其中

$$D(x)=1+c_1 x+c_2 x^2+\cdots+c_k x^k,$$

$$f(x)=D(x)\sum_{0\leq n<k} a_n x^n \pmod{x^k}$$

[证明]由递推式可得等式

$$(A(x)-u_0(x))+(c_1 xA(x)-u_1(x))+\cdots+(c_k x^k A(x)-u_k(x))=0$$

$u_0(x), u_1(x), \cdots, u_k(x)$次数不超过$k-1$且系数由$a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$决定。

注意到$f(x)=A(x)D(x)$且次数小于k,可得定理中$f(x)$的表达式。

[例]

$a_0, a_1, \cdots$满足条件

$$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}-2a_{n-3}$$

其中$n\geq 3$，$a_0=0$，$a_1=a_2=1$，求该数列的母函数

解：可得

变换得 $a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3} = 0$ 。

$$D(x) = 1 - 2x - x^2 + 2x^3 = (1-x)(1+x)(1-2x)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= D(x)(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2) = (1-x)(1+x)(1-2x)x(1+x) \\ &= x - x^2 = x(1-x) \end{aligned}$$

所以 $A(x) = \dfrac{f(x)}{D(x)} = \dfrac{(1-x)x}{(1-x)(1+x)(1-2x)} = \dfrac{x}{(1+x)(1-2x)}$

用母函数解线性常系数递推关系的一般方法:

1)求$D(x)$

2)求$f(x)$

3)求$\mathrm{A}(x)$,消去$f(x), D(x)$的公因子

4)将$\mathrm{A}(x)$表示为部分分式，即$(1-r_ix)^{-j}$的线性组合

5)展开所有的部分分式,有$[x^n](1-r_ix)^{-j} = C_{j-1}^{n+j-1}r_i^{\,n}$

［例］

斐波那契数列

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad (n \ge 1; F_0 = 0; F_1 = 1)$$

求该数列

解：可得

$$D(x) = 1 - x - x^2$$

$$f(x) = x$$

$$A(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

［例］

$a_0, a_1, \cdots$满足条件

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

其中$n > 1$，$a_0 = 0$，$a_1 = 1$，求该数列

解：可得

$$D(x) = 1 - 5x + 6x^2 = (1-2x)(1-3x)$$

$$f(x) = x$$

$$A(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-3x)}$$

2.3.2 数学归纳法

[例]

$$a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}} \qquad (n>0; a_0=1)$$

解 1：计算得到 $a_0=1, a_1=1/2$，$a_2=2/3, a_3=3/5, a_4=5/8$

猜测 $a_n=F_{n+1}/F_{n+2}$，可用数学归纳法证明

解 2：采用换元法，令 $a_n=b_n/b_n+1$

2.3.3 相加消去法

[例] $a_n - a_{n-1} = F_{n+2} - F_n, \qquad (n>0; a_0=6)$

解：
$$\begin{aligned}
a_n - a_{n-1} &= F_{n+2} - F_n \\
a_{n-1} - a_{n-2} &= F_{n+1} - F_{n-1} \\
a_{n-2} - a_{n-3} &= F_n - F_{n-2} \\
&\cdots \\
a_2 - a_1 &= F_4 - F_2 \\
a_1 - a_0 &= F_3 - F_1
\end{aligned}$$

因此 $a_n - a_0 = F_{n+2} + F_{n+1} - F_2 - F_1$

故 $a_n = F_{n+3} + 4$

2.3.4 差分法

[例] 求$s_n = \sum_{0\le k\le n} k^2$

解：容易建立递推关系$s_n - s_{n-1} = n^2, (n>0; s_0=0)$

因为
$$\begin{aligned}
s_n - s_{n-1} &= n^2 \\
s_{n-1} - s_{n-2} &= (n-1)^2
\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}
s_n - 2s_{n-1} + s_{n-2} &= 2n-1 \\
s_{n-1} - 2s_{n-2} + s_{n-3} &= 2n-3
\end{aligned}$$

从而
$$\begin{aligned}
s_n - 3s_{n-1} + 3s_{n-2} - s_{n-3} &= 2 \\
s_{n-1} - 3s_{n-2} + 3s_{n-3} - s_{n-4} &= 2
\end{aligned}$$

最终
$$s_n - 4s_{n-1} + 6s_{n-2} - 4s_{n-3} + s_{n-4} = 0$$
$$(n>3; s_0=0，s_1=1，s_2=5，s_3=14)$$

3 建立递推关系

一般方法

1) 找出求解对象
2) 得出初始条件
3) 建立递推关系
4) 解递推关系

[例] 求 n 位十进制正整数中出现偶数个 5 的数的个数。

解法一：令 a_n 表示 n 位十进制数中出现偶数个 5 的数的个数， b_n 表示 n 位十进制数中出现奇数个 5 的数的个数，则

$$\begin{cases} a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = 9b_{n-1} + a_{n-1} \end{cases} \qquad (n > 1; a_1 = 8, b_1 = 1)$$

解法二：注意到 $a_{n-1}+b_{n-1}=9\cdot 10^{n-2}$，从而有

$$a_n = 8a_{n-1} + 9\cdot 10^{n-2} \qquad (n > 1; a_1 = 8)$$

[例]从 n 个元素中取 r 个进行允许重复的组合，求组合数 $C^*(n,r)$

解：根据是否出现某个特定的元素 a，可得

$C^*(n,r)= C^*(n,r-1)+C^*(n-1,r)$

$C^*(n,1)=n,\ C^*(n-1,1)=n-1$

这是一个含有两个参数的递推关系。补充定义 $C^*(n,0)=1$

$$G_n(x) = C^*(n,0) + C^*(n,1)x + C^*(n,2)x^2 + \cdots$$

$$\begin{array}{rl} x: & C^*(n,1) = C^*(n,0) + C^*(n-1,1) \\ x^2: & C^*(n,2) = C^*(n,1) + C^*(n-1,2) \\ x^3: & C^*(n,3) = C^*(n,2) + C^*(n-1,3) \\ +) & \cdots \\ \hline & G_n(x) - 1 = xG_n(x) + G_{n-1}(x) - 1 \end{array}$$

$$\because \quad G_1(x) = C^*(1,0) + C^*(1,1)x + C^*(1,2)x^2 + \cdots$$

$$= 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

$$\therefore \quad G_n(x) = \frac{1}{1-x}G_{n-1}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}G_{n-2}(x)$$

$$= \cdots = \frac{1}{(1-x)^{n-1}}G_1(x) = \frac{1}{(1-x)^n}$$

生日问题

[例] 几个人在一起，使得其中存在有相同生日的概率至少为 1/2?

解 1：设 p_m 为 m 个人在一起没有相同生日的概率,则

$$p_m=[365-(m-1)]/365*p_{m-1},\ (m>1;\ p_1=1)$$

解 2：从 365 天中取 m 个日期分配给 m 个人，允许重复有 365^m 种方法，不允许重复有 $P(365,m)$ 种方法,因此取 m 个日期互不重复的概率是 $P(365,m)/365^m$

曲线分割平面问题

[例]设 n 条封闭曲线两两相交于两点，且其中任意三条不相交于一点，则这样的 n 条曲线把平面分割成了几个部分？

解：设满足条件的 n 条封闭曲线把平面分割成 a_n 个部分，则

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1),\ (\mathrm{n} > 1; a_1 = 2)$$

第 n 条封闭曲线和前面 n-1 条封闭曲线相交于 2(n-1)个点，这 2(n-1)个点把第 n 条封闭曲线截成 2(n-1)条弧，每条弧导致新增加一个域。

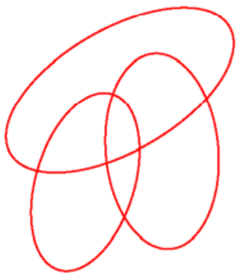


图　　三条封闭曲线

算术表达式的个数

[例] 10 个数字（0 到 9）和 4 个四则运算符(+-*/)共 14 个元素。求由其中 n 个元素的排列构成的算术表达式的个数。

解：令所求的表达式个数为 a_n，则

$$a_n = 10a_{n-1} + 40a_{n-2},\ (\mathrm{n} > 2; a_1 = 10, a_2 = 120)$$

所求的 n 个元素的排列是算术表达式，故从左向右的最后一个符号必然是数字。而第 n-1 位有两种可能，一是数字，一是运算符。

着色的方案数

[例] 平面上有一点 P，它是 n 个域的共同交界点，见图。现取 k 种颜色对这 n 个域进行着色，要求相邻两个域着的颜色不同，试求着色的方案数。

解：设 n 个域的着色方案数为 a_n，则

$$a_n = (k-2)a_{n-1} + (k-1)a_{n-2},$$
$$a_2 = k(k-1),\ a_3 = k(k-1)(k-2)$$

有两种情况：⑴D_1 和 D_{n-1} 颜色相同，这时 D_n 有 k-1 种颜色可用，而且从 D_1 到 D_{n-2} 的着色方案和 n-2 个域的着色方案一一对应 ；⑵D_1 和 D_{n-1} 颜色不同，这时 D_n 有 k-2 种颜色可供使用，而且从 D_1 到 D_{n-1} 的着色方案和 n-1 个域的着色方案一一对应。

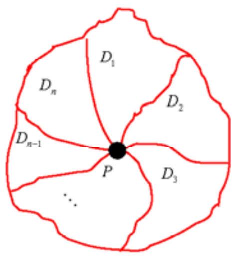


图 点P和n个域

二进制数扫描（1）

[例] 对于 n 位 2 进制数从左而右进行扫描，一旦出现 010 图象，便从这图象后面一位从头开始扫描。求对 n 位 2 进制数做这种扫描时最后 3 位出现 010 图象的数的个数。

解：设所求的数的个数为 a_n，则

$$a_n + a_{n-2} = 2^{n-3}, (n \geq 5; a_3 = 1, a_4 = 2)$$

最后 3 位是 010 的 n 位 2 进制数的个数是 2^{n-3}，其中包含最后 3 位出现 010 图象的以及在第 n-4 位到第 n-2 位出现 010 图象而在最后 3 位并不出现 010 图象的两类数，后一种数如右图所示。

$$0\overline{010}10\overline{010}10$$

$$001\overline{010}01\overline{010}$$

$$\underbrace{\bullet\ \bullet \cdots \bullet}_{1\sim n-5}\underbrace{0\quad 1\quad 0}_{n-4\sim n-2}10$$

[例] 对于 n 位 2 进制数从左而右进行扫描，一旦出现 010 图象，便从这图象后面一位从头开始扫描。求对 n 位 2 进制数做这种扫描时最后 3 位<u>第一次</u>出现 010 图象的数的个数。

解：设所求的数的个数为 a_n，则

$$a_n + a_{n-2} + a_{n-3} + 2a_{n-4} + \cdots + 2^{n-6} a_3 = 2^{n-3},$$
$$(n \geq 6; a_3 = 1,\ a_4 = 2,\ a_5 = 3)$$

最后 3 位是 010 的 n 位 2 进制数的个数是 2^{n-3}，对这 2^{n-3} 个 2 进制数分析如下：

a）在最后三位第 1 次出现 010 图象，其个数为 a_n

				………	0	1	0

b）在第 n-4 位到第 **n**-2 位第 1 次出现 010 图象，其个数为 a_{n-2}

		………	0	1	0	1	0

c）在第 n-5 位到第 n-3 位第 1 次出现 010 图象，其个数是 a_{n-3}

	………	0	1	0	0	1	0

d）在第 n-6 位到第 n-4 位第 1 次出现 010 图象，其个数是 $2a_{n-4}$

………	0	1	0	*	0	1	0

一般可以归纳为：

对 $k \geqslant 3$，从第$(n\text{-}k\text{-}2)$位到第 $n\text{-}k$ 位第一次出现 010 图象，其个数为 $2^{k\text{-}3}a_{n\text{-}k}$。从第 $n\text{-}k$ 位到第 n-3 位中间的 k-3 位可以取 0，1 两种值，故有 $2^{k\text{-}3}$ 种状态。

			1	1	0	………	1	1	0

第n-k位

第n-2位

最终得到：

$$a_n + a_{n-2} + a_{n-3} + 2a_{n-4} + \cdots + 2^{n-6}a_3 = 2^{n-3},$$
$$(n \ge 6; a_3 = 1,\ a_4 = 2,\ a_5 = 3)$$

用母函数法求解

$$x + a_5x^2 + a_6x^3 + a_7x^4 + \cdots$$
$$x^3 : a_6 + a_4 + a_3 = 2^3$$
$$x^4 : a_7 + a_5 + a_4 + 2a_3 = 2^4$$
$$x^5 : a_8 + a_6 + a_5 + 2a_4 + 2^2a_3 = 2^5$$
$$+)\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[A(x) - a_3 - a_4x - a_5x^2] + x^2[A(x) - a_3] + (x^3 + 2x^4 + 2^2x^5 + \cdots)A(x) = \frac{2^3x^3}{1-2x}$$

$$[A(x) - 1 - 2x - 3x^2] + x^2[A(x) - 1] + \frac{x^3}{1-2x}A(x) = \frac{8x^3}{1-2x}$$

$$A(x) = \frac{1}{1-2x+x^2-x^3} = 1 + 2x + 3x^2 + 5^3x^3 + 9x^4 + 16x^5 + 28x^6 + 49x^7 + \cdots$$

空单元的平均数

[例]设有地址从 1 到 n 的单元，用以纪录一组信息。这个信息的每个元素都占用两个单元，而且存放的地址是完全随机的，因而可能出现两个存放信息单元之间留下一个空单元无法存放其他信息，求这 n 个单元留下空单元的平均数。

解：设这个平均数为 a_n

1	2		i+1	i+2		n−1	n

存储单元如上图，设某一信息占用了第 i+1，i+2 两个单元，把这组单元分割成两个部分，一是从 1 到 i，另一从 i+3 到 n。由于用相邻两个单元的几率相等，可得：

$$a_n = \frac{1}{n-1}[(a_0 + a_{n-2}) + (a_1 + a_{n-3}) + \cdots + (a_{n-2} + a_0)]$$

即 $(n-1)a_n = 2\sum_{k=0}^{n-2} a_k$，$(n-2)a_{n-1} = 2\sum_{k=0}^{n-3} a_k$

从而 $(n-1)a_n - (n-2)a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0, (n > 2; a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0)$

$$G(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4 + \cdots$$

$$G'(x) = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2 + 4a_5 x^3 + \cdots$$

$$\begin{array}{rl}
x: & 2a_3 - a_2 = 2a_1 \\
x^2: & 3a_4 - 2a_3 = 2a_2 \\
x^3: & 4a_5 - 3a_4 = 2a_3 \\
+) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hline
 & G'(x) - xG'(x) = 2xG(x)
\end{array}$$

$$G'(x) - xG'(x) = 2xG(x) \Rightarrow \frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{2x}{1-x} = -2 + \frac{2}{1-x}$$

$$\ln G(x) = -2x + \ln(1-x)^{-2} + C \Rightarrow G(x) = ke^{-2x}(1-x)^{-2}$$

$$G(x)\big|_{x=0} = a_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

$$G = e^{-2x}(1-x)^{-2} = [1 - 2x + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots](1 + 2x + 3x^2 + \cdots)$$

$$= 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + x^4 + \frac{4}{15}x^5 + \cdots$$

$$a_{n+1} = (n+1) - 2n + \frac{2^2}{2!}(n-1) - \frac{2^3}{3!}(n-2) + \cdots + (-1)^n \frac{2^n}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^k (n-k+1)}{k!}.$$

错排问题

[例] n 个有序的元素应有 $n!$ 个不同的排列，如若一个排列使得所有的元素都不在在原来的位置上，则称这个排列为错排。求设 n 个数错排的数目。

解：设 n 个数 1，2，…，n 错排的数目为 D_n，则

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}), (\mathrm{n} > 2; D_1 = 0, D_2 = 1)$$

先取一数 i，然后 1）数 i 分别与其他的 n-1 个数之一互换，其余 n-2 个数进行错排，共得(n-1)D_{n-2} 个错排；2）对数 i 以外的 n-1 个数进行错排，然后 i 与其中每个数互换得(n-1)D_{n-2} 个错排。

等价的递推公式

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}),(\mathrm{n}>1;D_0=1,D_1=0)$$

$$D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$$

令$D(x)=D_0+D_1x+D_2\dfrac{x^2}{2!}+D_3\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$

$$x:D_1=D_0+(-1)^1$$

$$\frac{x^2}{2!}:D_2=2D_1+(-1)^2$$

$$\frac{x^3}{3!}:D_3=3D_2+(-1)^3$$

$$+)\cdots$$

$$D(x)-1=xD(x)+e^{-x}-1$$

$$D(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}=\sum_{n\ge 0}\left[n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)\right]\frac{x^n}{n!}$$

4 递推关系的性质

- Fibonacci 数
- Stirling 数
- Catalan 数

4.1 Fibonacci 数

[例] 最初有雌雄兔子一对，若过两个月一对雌雄兔子就可繁殖雌雄各一的一对小兔，则过 n 个月后共有多少对兔子？

解：斐波那契数满足 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\quad(n\ge 1;F_0=0;F_1=1)$

可求得母函数 $F(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$

以及数列的通项公式 $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right](n\ge 0)$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

Fibonacci 数的组合意义

1．若由 1 和 2 构成的序列的和为 n，则这样的序列有多少？

1+1+1+1　　1+1+2　　1+2+1　　2+1+1　　2+2

2．用方块和骨牌覆盖长 n 格的带子，有多少种覆盖方法？

用f_n来计数，则可得

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad (n>1; f_0 = 1, f_1 = 1)$$

因此

$$f_n = F_{n+1}$$

Fibonacci 数与二项式系数

$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\cdots = F_{n+1}$$

Fibonacci 恒等式

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

$$F_1^{\,2} + F^2{}_2 + \cdots + F_n^{\,2} = F_n F_{n+1}$$

4.2 Stirling 数

4.2.1 第一类 Stirling 数

[定义]

$$\begin{aligned}[x]_n &= x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \\ &= s(n,0)+s(n,1)x+s(n,2)x^2+\cdots+s(n,n)x^n.\end{aligned}$$

称 $s(n,0), s(n,1),, s(n,n)$ 为第一类 Stirling 数

$$\begin{aligned}[x]_{n+1} &= [s(n,0)+s(n,1)x+\cdots+s(n,n)x^n](x-n) \\ &= s(n+1,0)+s(n+1,1)x+\cdots+s(n+1,n+1)x^{n+1},\end{aligned}$$

显然有

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k)$$

4.2.2 第二类 Stirling 数

[定义] n 个有区别的球放到 m 个相同的盒子中,要求无一空盒,其不同的方案数用 $S(n,m)$表示,称为第二类 Stirling 数。

例如红,黄,蓝,白四种颜色的球,放到两个无区别的盒子里,不允许有空盒,其方案有如下七种:

	1	2	3	4	5	6	7
第 1 盒子	r	y	b	w	ry	rb	rw
第 2 盒子	ybw	rbw	ryw	ryb	bw	yw	yb

因此 $S(4,2)=7$

第二类 Stirling 数的性质

$(a)\ S(n,0)=0 \qquad (b)\ S(n,1)=1$

$(c)\ S(n,2)=2^{n-1}-1 \qquad (d)\ S(n,n-1)=C(n,2)$

$(e)\ S(n,n)=1$

[定理] 第二类 Stirling 数满足下面的递推关系,

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1),(n>1,m\geq 1).$$

第二类 Stirling 数的递推关系

红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的两个盒子里

S(5,2)=2S(4,2)+S(4,1)=2x7+1=15

故共有 15 种不同的方案。

先把绿球取走，余下的四个球放到两个盒子的方案已见前面的例子。和前面一样用 r，y，b，w 分别表示红，黄，蓝，白球，绿球用 g 表示，得

g 不独占一盒				g 独占一盒	
第 1 盒子	第 2 盒子	第 1 盒子	第 2 盒子	第 1 盒子	第 2 盒子
rg	ybw	r	ybwg	g	rybw
yg	rbw	y	rbwg		
bg	ryw	b	rywg		
wg	ryb	w	rybg		
ryg	bw	ry	bwg		
rbg	yw	rb	ywg		
rwg	yb	rw	ybg		

第二类 Stirling 数的计算公式

第二讲中，已经得到 n 个有区别的球放到 m 个相同的盒子中的数目是

$$\sum_{0\leq k\leq m}(-1)^k C_k^m (m-k)^n$$

由于 n 个球有区别，m 个盒子有区别，无空盒时方案计数为

$$m!S(n,m)$$

因此

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_k^m (m-k)^n$$

P182 中的表给出了部分第二类 Stirling 数。

n 个球放到 m 个盒子里（1）

- n 个球有区别，m 个盒子有区别，有空盒时方案计数为 m^n。
- n 个球有区别，m 个盒子有区别，无空盒时方案计数为 $m!S(n,m)$。
- n 个球有区别，m 个盒子无区别，有空盒时方案计数为

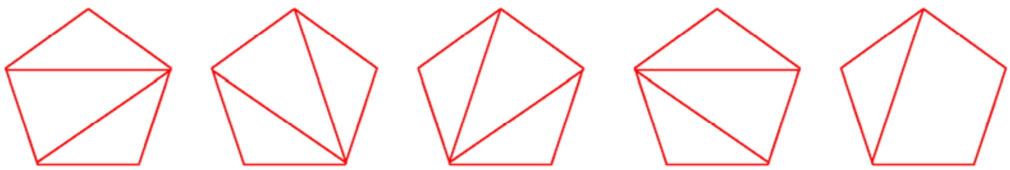
$$S(n,1)+S(n,2)+\cdots+S(n,m), n\geq m$$
$$S(n,1)+S(n,2)+\cdots+S(n,n), n\leq m$$

- n 个球有区别，m 个盒子无区别，无空盒时方案计数为 $S(n,m)$。
- n 个球无区别，m 个盒子有区别，有空盒时方案计数为 $C(n+m-1,n)$。
- n 个球无区别，m 个盒子有区别，无空盒时方案计数为 $C(m+(n-m)-1,n-m)=C(n-1,m-1)$。
- n 个球无区别，m 个盒子无区别，有空盒时方案计数为 $G(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$。
- n 个球无区别，m 个盒子无区别，无空盒时方案计数为 $G(x)=\dfrac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$。

4.3 Catalan 数

一个凸 n 边形,通过不相交于 n 边形的对角线,把 n 边形拆分成若干三角形,不同拆分的数目用 C_n 表示，C_n 称为 Catalan 数

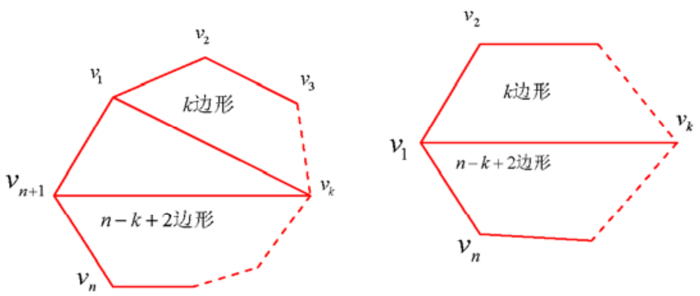
例如五边形有如下五种拆分方案，故 C_5=5



Catalan 数的递推关系

$$(a)\ C_{n+1}=C_2C_n+C_3C_{n-1}+\cdots+C_nC_2$$

$$(b)\ (n-3)C_n=\frac{n}{2}(C_3C_{n-1}+C_4C_{n-2}+\cdots+C_{n-2}C_4+C_{n-1}C_3)$$



Catalan 数的计算公式(1)

$$\because\ \mathrm{C}_{n+1} = C_2C_n + C_3C_{n-1} + \cdots + C_nC_2, C_2 = 1$$

$$\therefore\ C_{n+1} - 2C_n = C_3C_{n-1} + C_4C_{n-2} + \cdots + C_{n-2}C_4 + C_{n-1}C_3.$$

$$\therefore\ (n-3)C_n = \frac{n}{2}(C_3C_{n-1} + C_4C_{n-2} + \cdots + C_{n-2}C_4 + C_{n-1}C_3)$$

$$= \frac{n}{2}(C_{n+1} - 2C_n)$$

$$\therefore\ nC_{n+1} = (4n-6)C_n.$$

令$E_{n+1} = nC_{n+1}$，则$E_2 = C_2 = 1$

$$E_{n+1} = nC_{n+1} = (4n-6)\frac{E_n}{n-1} = \frac{2(n-3)}{n-1}E_n = \frac{(2n-2)(2n-3)}{(n-1)(n-1)}E_n$$

$$= \frac{(2n-2)(2n-3)}{(n-1)(n-1)} \cdot \frac{(2n-4)(2n-5)}{(n-2)(n-2)} \cdots \frac{4\cdot 3}{2\cdot 2} \cdot \frac{2\cdot 2}{1\cdot 1}$$

$$= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \binom{2n-2}{n-1}$$

Catalan 数的计算公式(2)

$$G(x) = C_2 + C_3x + C_4x^2 + \cdots$$

$$\begin{array}{rl}
x^2: & C_4 = C_2C_3 + C_3C_2, \\
x^3: & C_5 = C_2C_4 + C_3C_3 + C_4C_2, \\
x^4: & C_6 = C_2C_5 + C_3C_4 + C_4C_3 + C_5C_2 \\
+) & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hline
\end{array}$$

$$G(x) - x - 1 = C_2(C_3x^2 + C_4x^3 + \cdots) + C_3x(C_2x + C_3x^2 + \cdots) + \cdots$$

$$= -x + C_2(C_2x + C_3x^2 + \cdots) + C_3x(C_2x + C_3x^2 + \cdots) + \cdots$$

$$\therefore\ G(x) - 1 = x[G(x)]^2, G(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$G(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + \frac{1}{2}\binom{2}{1}x + \frac{1}{3}\binom{4}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}\binom{2n\text{-}2}{n\text{-}1}x^{\text{n-1}} + \cdots$$

Catalan 数的计算公式(3)

$$C_{n+1} = \frac{1}{n}\binom{2n\text{-}2}{n\text{-}1}$$

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, ...

给乘积加括号

[例] $P = a_1a_2a_3\cdots a_n$ 为 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的乘积,依据乘法的结合律,不改变其顺序,只用括号表示成对的乘积.试问有几种不同的乘法方案?

解：令 p_n 表示 n 个数乘积的 $n-1$ 对括号插入的不同方案数.

$$p_n = p_1p_{n-1} + p_2p_{n-2} + \cdots + p_{n-1}p_1, p_1 = p_2 = 1.$$

令 $p_k = C_{k+1}, k = 1,2,3,\cdots,n,$ 故得

$$C_{n+1} = C_2C_n + C_3C_{n-1} + \cdots + C_{n-1}C_3 + C_nC_2,$$

而且 $C_2 = C_3 = 1$ 故　　即为 Catalan 数 $C_{n+1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

Catalan 数-例题

[例] n 个 1 和 n 个 0 组成一 2n 位的 2 进制数，要求从左到右扫描，1 的累计数不小于 0 的累计数，试求满足这条件的数有多少？

解法 1. 设 P_{2n} 这样所得的数的个数。在 2n 位上填入 n 个 1 的方案数为 C(2n,n)，减去不符合要求的方案数即为所求。不合要求的数指的是从左而右扫描，出现 0 的累计数超过 1 的累计数的数。

可以建立了由 n+1 个 0 和 n-1 个 1 组成的 2n 位数，与由 n 个 0 和 n 个 1 组成的 2n 位数中从左向右扫描出现 0 的累计数超过 1 的累计数的数一一对应。

$$p_{2n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Catalan 数-例题

解法 2. 这个问题可以一一对应于图中从原点(0,0)到(n,n)点的路径要求中途所经过的点(a,b)满足关系 $a \leqslant b$。对应的办法是从(0,0)出发，对 $2n$ 位数从左而右扫描，若遇到 1 便沿 y 轴正方向走一格；若遇到 0 便沿 x 轴正方向走一格。

从 O’出发经过 OA 上的点到达 A’的路径，对应从 O 出发经过 OA 下的点到达 A 点的路径，也对应从 B 出发到达 A’点的路径