应用组合数学

第 3 讲 母函数

何英华
天津大学计算机科学与技术学院
（hyh@tju.edu.cn，http://202.113.12.9/~hyh）

参考文献

- H. Wilf. Generating functionology, 2nd edition . Academic Press, 1994
- 王天明译。发生函数论。清华大学出版社。2003
- 孙淑玲，许胤龙，组合数学引论，中国科学技术大学出版社，2004

1 引言

假设有一个红球 r，一个黄球 y，一个蓝球 b，那么由这三个球共能构成多少种组合方案。

[例] 设 A={r,y,b}，则

$$
\begin{aligned}
(1+\mathrm{r}x)(1+\mathrm{y}x)(1+\mathrm{b}x)= \\
& 1+ \\
& (\mathrm{r}+\mathrm{y}+\mathrm{b})x+ \\
& (\mathrm{ry}+\mathrm{yb}+\mathrm{rb})x^2+ \\
& \mathrm{ryb}x^3
\end{aligned}
$$

不难观察到 A 的 r-组合(r=0,1,2,3)，令 r=y=b=1 即可得到对应的 r-组合计数

[例] 把一张币值为 2 角的人民币兑换为 1 分、2 分或 5 分的硬币，问有多少种兑换方法。

一个 1 分的硬币表示为 a_1，一个 2 分的硬币表示为 a_2，一个 5 分的硬币表示为 a_5.

那么 1 分，2 分和 5 分的硬币所能构成的金额可如下表示：

$$(1+a_1x+a_1^2x^2+\cdots)(1+a_2x^2+a_2^2x^4+\cdots)(1+a_5x^5+a_5^2x^{10}+\cdots)$$

求 x^{20} 的系数。

所有组合信息的编码。解码获得所需要的组合信息。

2 组合的母函数

1．r-组合的计数

$C(n,r)\leftrightarrow(1+x)^n$

$$C_0^n, C_1^n, C_2^n, \cdots, C_n^n$$
$$\updownarrow$$
$$C_0^n x^0 + C_1^n x^1 + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n$$
$$\|$$
$$\sum_{0\le r\le n} C_r^n x^r = (1+x)^n$$

2．r-可重复组合的计数

[例] 设 A={a,b}，则

$(1+ax+a^2x^2+\ldots)\ (1+bx+b^2x^2+\ldots) =$

$1 +$

$(a+b)x +$

$(a^2+ab+b^2)x^2 +$

$(a^3+a^2b+ab^2+b^3)x^3 +$

$\ldots$

不难观察到 A 的 r-可重复组合(r=0,1,2,3)，令 a=b=1 即可得到对应的 r-可重复组合计数

$C(n+r\text{-}1,r)\leftrightarrow(1\text{-}x)^{-n}$

$$C_0^{n+0-1}, C_1^{n+1-1}, C_2^{n+2-1}, \cdots$$
$$\updownarrow$$
$$C_0^{n+0-1}x^0 + C_1^{n+1-1}x^1 + C_2^{n+2-1}x^2 + \cdots$$
$$\|$$
$$\sum_{r\ge 0} C_r^{n+r-1}x^r = \frac{1}{(1-x)^n}$$

3．组合数的母函数

[定理]　设$A=\{t_1,\cdots,t_n\}$。在集合A的$r-$重复组合中，t_k允许重复的次数所组成的集合若记为M_k,则这样的组合的全部由

$$\prod_{1\le k\le n}\sum_{j_k\in M_k}t_k^{j_k}x^{j_k}$$

的展开式中项x^r的系数$\delta_r(t_1,\cdots,t_n)$的全部单项式给出，因此A的$r-$重复组合数为$\delta_r(1,\cdots,1)$，称函数

$$G(x)=\prod_{1\le k\le n}\sum_{j_k\in M_k}x^{j_k}=\sum_{0\le r}\delta_r(1,\cdots,1)x^r$$

为相应的组合数的（普通型）母函数。

4．组合的计数-例题（1）

[例] 有红球两个，白球、黄球各一个，试求有多少种不同的组合方案。

解：$M1=\{0,1,2\}, M2=\{0,1\}, M3=\{0,1\}$,因此

$$(1+t_1x+t_1{}^2x^2)\,(1+t^2x)\,(1+t^3x)=1+$$
$$(t^1+t^2+t^3)x+(t_1{}^2+t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)x^2+$$
$$(t_1{}^2t_2+t_1{}^2t_3+t_1t_2t_3)x^3+t_1{}^2t_2t_3\,x_4$$

问题的母函数是 $G(x)=(1+x+x2)\,(1+x)\,(1+x)=$
$1+3x+4x^2+3x^3+x^4$

[例] r 个完全一样的球放到 n 个有标志的盒子中，不允许有空盒，问共有多少种不同的方案？

解：每个盒子可以放入 1,2,3,… 个球，得母函数

$$G(x)=(x+x^2+\cdots)^n=\frac{x^n}{(1-x)^n}=\sum_{r\ge n}C_{n-1}^{r-1}x^r$$

$G(x)$中 x^r 的$[x^r]G(x)$系数即为所求。

[例]某单位有 8 位男同志，5 个女同志，现要组织一个由偶数个男同志和数目不少于两个的女同志组成的小组，试求有多少种解决方案。

解：令a_n为从 8 位男同志中抽出 n 个的允许组合数，由于要求男同志的数目必须是偶数，故

$a_1=a_3=a_5=a_7=0$

$a_0=1$，

$a_2=C(8,2)=28$

$a_4=C(8,4)=70$

$a_6 = C(8,6) = 28$

$a_8 = 1$

所以数列$a_0, a_1, \ldots, a_8$对应一母函数

$$A(x) = 1 + 28x^2 + 70x^4 + 28x^6 + x^8$$

类似的方法可得女同志的允许组合数所对应的母函数为

$$B(x) = 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

$$\begin{aligned} C(x) = A(x)B(x) &= 10x^2 + 10x^3 + 285x^4 + 281x^5 + 840x^6 + 728x^7 \\ &+ 630x^8 + 350x^9 + 150x^{10} + 38x^{11} + 5x^{12} + x^{13} \end{aligned}$$

C(x)中x^k项的系数c_k为符合要求的 k 个人组成的小组的数目，总的组成方式数目为：
10+10+285+281+840+728+630+350+150+38+5+1=3328。

3 排列的母函数

1．r-排列的计数

注意到$(1+x)^n = \sum_{0 \le r \le n} C_r^n x^r = \sum_{0 \le r \le n} P_r^n \frac{x^r}{r!}$，可知

$$\begin{gathered} P_0^n, P_1^n, P_2^n, \cdots, P_n^n \\ \updownarrow \\ P_0^n \frac{x^0}{0!} + P_1^n \frac{x^1}{1!} + P_2^n \frac{x^2}{2!} + \cdots + P_n^n \frac{x^n}{n!} \\ \| \\ \sum_{0 \le r \le n} P_r^n \frac{x^r}{r!} = (1+x)^n \end{gathered}$$

2．排列数的母函数

[定理]　设$A=\{t_1,\cdots,t_n\}$。在集合A的$r-$重复排列中，t_k允许重复的次数所组成的集合若记为M_k,则这样的排列数的指数型母函数为

$$G(x)=\prod_{1\le k\le n}\sum_{j_k\in M_k}\frac{x^{j_k}}{j_k!}$$

[证明]展开$G(x)$

$$G(x)=\sum_{r\ge 0}\frac{x^r}{r!}\sum_{\substack{j_1+j_2+\cdots+j_n=r\\ j_k\in M_k(1\le k\le n)}}\frac{r!}{j_1!\ j_2!\cdots j_n!}$$

对于固定的一组数$j_1,j_2,\cdots,j_n$,注意到$\dfrac{(j_1+j_2+\cdots+j_n)!}{j_1!\ j_2!\cdots j_n!}$正好是其对应的r－多重排列数,定理得证.

3．r-可重复排列的计数

$$\begin{aligned}G(x)&=(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^n\\&=(e^x)^n\\&=e^{nx}\\&=\sum_{r\ge 0}n^r\frac{x^r}{r!}\end{aligned}$$

4．排列的计数

[例]由 a、b、c、d 这 4 个符号取 5 个进行排列，要求数 a 出现次数不超过 2 次，但不能不出现；b 出现次数不超过 1 次； c 出现次数可达 3 次，也可以不出现；d 出现次数为偶数。求满足上述条件的排列的个数。

解：满足上述条件的排列数的 指数型母函数为

$$\begin{aligned}G(x)&=(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!})(1+\frac{x}{1!})(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!})\\&=\frac{x}{1!}+5\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+64\frac{x^4}{4!}+215\frac{x^5}{5!}+\cdots\end{aligned}$$

[例] r 个有标志的球放到 n 个有标志的盒子中，不允许有空盒，问共有多少种不同的方案？

解：每个盒子可以放入 1,2,3,… 个球，得指数型母函数

$$\begin{aligned}G(x)&=(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^n\\&=\sum_{r\ge 0}\left[\sum_{0\le k\le n}(-1)^k C_k^n(n-k)^r\right]\frac{x^r}{r!}\end{aligned}$$

$G(x)$中$xr/r!$的系数$[xr/r!]G(x)$即为所求。

4 各种类型的母函数

1．普通型母函数

定义：给定一个序列$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，称函数

$$G(x)=\sum_{k\ge 0} a_k x^k = a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

为该序列的普通型母函数，其中a_n也用$[x^k]G(x)$表示。

[例] $1,1,1,\cdots \leftrightarrow 1+x+x^2+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$

一些普通型母函数（1）

$1,1,1,1,\cdots,1,\cdots \qquad \dfrac{1}{1-x}=\sum_{n\ge 0}x^n$

$0,1,2,3,4,\cdots,n,\cdots \qquad \dfrac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n\ge 1}nx^n$

$0,0,1,3,6,10,\cdots,C_2^n,\cdots \qquad \dfrac{x^2}{(1-x)^3}=\sum_{n\ge 2}C_2^n x^n$

$0,\cdots,0,1,m+1,\cdots,C_m^n,\cdots \qquad \dfrac{x^m}{(1-x)^{m+1}}=\sum_{n\ge m}C_m^n x^n$

$1,m,C_2^m\cdots,C_n^m,\cdots,m,1 \qquad (1+x)^m=\sum_{n\ge 0}C_n^m x^n$

$1,m+1,C_2^{m+2},C_3^{m+3},\cdots \qquad \dfrac{1}{(1-x)^{m+1}}=\sum_{n\ge 0}C_n^{m+n}x^n$

一些普通型母函数（2）

$1,0,1,0,\cdots,1,0,\cdots \qquad \dfrac{1}{1-x^2}=\sum_{n\ge 0}x^{2n}$

$1,c,c^2,c^3,\cdots,c^n,\cdots \qquad \dfrac{1}{1-cx}=\sum_{n\ge 0}c^nx^n$

$1,1,\dfrac{1}{2!},\dfrac{1}{3!},\dfrac{1}{4!},\cdots,\dfrac{1}{n!},\cdots \qquad e^x=\sum_{n\ge 0}\dfrac{x^n}{n!}$

$0,1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots \qquad \ln\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n\ge 1}\dfrac{x^n}{n}$

$0,1,1+\dfrac{1}{2},1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3},\cdots,H_n,\cdots \qquad \dfrac{1}{1-x}\ln\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n\ge 1}H_nx^n$

$0,0,1,3(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}),4(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}),\cdots \qquad \dfrac{x}{(1-x)^2}\ln\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n\ge 1}n(H_n-1)x^n$

普通型母函数的运算（1）

$$A(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n \qquad a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

$$B(x)=\sum_{n\geq 0} b_n x^n \qquad b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$$

右移 $xA(x)=\sum_{n\geq 1} a_{n-1} x^n \qquad 0, a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \cdots$

左移 $\dfrac{A(x)-a_0}{x}=\sum_{n\geq 0} a_{n+1} x^n \qquad a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n+1}, \cdots$

微分 $A'(x)=\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n \qquad a_1, 2a_2, \cdots, (n+1)a_n, \cdots$

积分 $\int_0^x A(t)dt=\sum_{n\geq 1}\dfrac{a_{n-1}}{n}x^n \qquad 0, a_0, \dfrac{a_1}{2}, \dfrac{a_2}{3}, \cdots, \dfrac{a_{n-1}}{n}, \cdots$

缩放 $A(cx)=\sum_{n\geq 0} c^n a_n x^n \qquad a_0, ca_1, c^2 a_2, \cdots, c^n a_n, \cdots$

和 $A(x)+B(x)=\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)x^n \qquad a_0+b_0, \cdots, a_n+b_n, \cdots$

差分 $(1-x)A(x)=a_0+\sum_{n\geq 1}(a_n-a_{n-1})x^n \qquad a_0, a_1-a_0, \cdots, a_n-a_{n-1}, \cdots$

卷积 $A(x)B(x)=\sum_{n\geq 0}(\sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k})x^n \qquad a_0b_0, a_1b_0+a_0b_1, \cdots, \sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k}, \cdots$

部分和 $\dfrac{A(x)}{1-x}=\sum_{n\geq 0}(\sum_{0\leq k\leq n} a_k)x^n \qquad a_0, a_0+a_1, \cdots, \sum_{0\leq k\leq n} a_k, \cdots$

母函数的运算-例题（1）

[例] 已知

$$A(x)=e^x-1=\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

则

$$B(x)=\frac{x^m}{1!}+\frac{x^{m+1}}{2!}+\frac{x^{m+2}}{3!}+\cdots=x^{m-1}A(x)$$

右移 m-1 位

[例] 已知

$$A(x)=\sin x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

则

$$B(x)=\frac{1}{7!}x+\frac{1}{9!}x^3+\cdots=[\sin x-x-\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5]/x^6$$

左移 6 位

[例] 调和数 H_n 定义为

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

求序列 $H_1, H_2, H_3, \ldots$ 的母函数。

解：观察

$$1,1,1,1,\cdots,1,\cdots$$

$$0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

$$0,1,1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\cdots,H_n,\cdots$$

2．指数型母函数

定义：给定一个序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，称函数

$$G(x) = \sum_{k\ge 0} a_k \frac{x^k}{k!} = a_0 \frac{x^0}{0!} + a_1 \frac{x^1}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

为该序列的普通型母函数，其中 a_n 也用 $[x^k/k!]G(x)$ 表示。

[例] $1,1,1,\cdots \leftrightarrow 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots = e^x$

一些指数型母函数

$$e^x = \sum_{n\ge 0} \frac{x^n}{n!} \qquad \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{n\ge 0} \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!}$$

$$xe^x = \sum_{n\ge 1} n \frac{x^n}{n!} \qquad e^{cx} = \sum_{n\ge 0} c^n \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{2} x^2 e^x = \sum_{n\ge 2} C_2^n \frac{x^n}{n!} \qquad \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n\ge 0} \frac{1}{n+1} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{m!} x^m e^x = \sum_{n\ge m} C_m^n \frac{x^n}{n!} \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n\ge 0} n! \frac{x^n}{n!}$$

指数型母函数的运算

$$A(x) = \sum_{n\ge 0} a_n \frac{x^n}{n!} \qquad \frac{A(x) - a_0}{x} = \sum_{n\ge 1} \frac{a_{n+1}}{n+1} \frac{x^n}{n!}$$

$$B(x) = \sum_{n\ge 0} b_n \frac{x^n}{n!} \qquad A(x) + B(x) = \sum_{n\ge 0} (a_n + b_n) \frac{x^n}{n!}$$

$$\int_0^x A(t)dt = \sum_{n\ge 1} a_{n-1} \frac{x^n}{n!} \quad A'(x) - A(x) = \sum_{n\ge 0} (a_{n+1} - a_n) \frac{x^n}{n!}$$

$$A'(x) = \sum_{n\ge 0} a_{n+1} \frac{x^n}{n!} \qquad A(x)B(x) = \sum_{n\ge 0} \Big(\sum_{0\le k\le n} C_k^n a_k b_{n-k} \Big) \frac{x^n}{n!}$$

$$xA(x) = \sum_{n\ge 0} n a_{n-1} \frac{x^n}{n!} \quad e^x A(x) = \sum_{n\ge 0} \Big(\sum_{0\le k\le n} C_k^n a_k \Big) \frac{x^n}{n!}$$

3．其他类型的母函数

母函数的一般形式为

$$G(x)=\sum_{k\geq 0}a_k w_k(x)$$

赋予函数 $w_k(x)$不同的定义，就可以得到不同类型的母函数。例如 $w_k(x)$定义为 x^k、$x^k/k!$、k^{-x}即可得到普通型母函数、指数型母函数、狄利克雷母函数。

5 母函数的展开

1．给定一个母函数，找出它对应的序列

方法 1：利用 Taylor 公式展开成幂级数

$$f(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

[例] 展开 $\dfrac{1}{1-cx}$

解：$\left(\dfrac{1}{1-cx}\right)^{(k)}=\dfrac{k!c^k}{(1-cx)^{k+1}}$

方法 2：由于对幂级数可做和、差、积、商、复合、微分、积分等运算，因此先分解母函数，直到各部分的展开式已知。

[例] 展开 $\dfrac{1}{1-cx}+e^x,\quad \dfrac{x}{1-3x+2x^2}$

解：第一个简单，第二个先采用部分分式法变形

$$\frac{x}{1-3x+2x^2}=x\left(\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}\right)$$

6 母函数的应用

- 证明恒等式
  - 万金油方法
- 计数
- 解递推关系
  - 解线性常系数递推关系

6.1 证明恒等式

[例] 证明 Vandermonde 恒等式

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

解：利用恒等式$(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$

求和式的母函数

[例]求$\sum_{k\geq 0}C_{n-k}^{k},(n=0,1,2,\cdots)$的母函数

解：自由变量是n，写出母函数：$F(x)=\sum_{n}\sum_{k\geq 0}C_{n-k}^{k}x^n$

交换求和次序得：$F(x)=\sum_{k\geq 0}\sum_{n}C_{n-k}^{k}x^n$

对内部进行拼凑：$F(x)=\sum_{k\geq 0}x^k\sum_{n}C_{n-k}^{k}x^{n-k}$

求内部的和：$F(x)=\sum_{k\geq 0}x^k(1+x)^k=\sum_{k\geq 0}(x+x^2)^k=\dfrac{1}{1-x-x^2}$

[例] 证明

$$\sum_{k}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}=\sum_{k}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k$$

解：需要利用$\dfrac{1}{(1-x)^{m+1}}=\sum_{n\geq 0}C_{n}^{m+n}x^n$ 得到

$$\sum_{n\geq m}C_{m}^{n}x^n=\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$$

[例] 证明

$$\sum_{i}\binom{n}{i}\binom{2n}{n-i}=\binom{3n}{n}$$

解：考虑更一般的恒等式

$$\sum_{i}\binom{n}{i}\binom{m}{r-i}=\binom{3n}{r}$$

6.2 解递推关系

递推关系是组合数学用以计数的一种强有力的工具。

[例] Hanoi 问题

$a_0, a_1, \cdots$满足条件

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \qquad (n \ge 0; a_0 = 0)$$

解：

$$
\begin{array}{l}
令A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\
\qquad\qquad x^0 : a_1 = 2a_0 + 1 \\
\qquad\qquad x^1 : a_2 = 2a_1 + 1 \\
\qquad\qquad x^2 : a_3 = 2a_2 + 1 \\
\quad + \qquad \cdots \\
\hline
\qquad \dfrac{A(x) - a_0}{x} = 2A(x) + \dfrac{1}{1-x}
\end{array}
$$

$$(1-2x)H(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$H(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x}$$

将$\dfrac{x}{(1-x)(1-2x)}$化为部分分数。

$$\frac{\mathrm{A}(1-x) + \mathrm{B}(1-2\mathrm{x})}{(1-2\mathrm{x})(1-x)} = \frac{\mathrm{x}}{(1-2x)(1-x)}$$

得到：

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A + 2B = -1 \end{cases} \qquad 解得：\ A = 1，\ B = -1$$

所以：

$$H(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = (1 + 2x + 2^2 x^2 + \cdots) - (1 + x + x^2 + \cdots) = \sum_{k=0}^{\infty} (2^k - 1) x^k$$

则：$h_n = 2^n - 1$

a_n是规模 n 的指数函数，以$n = 60$为例，$2^{60} \approx 1.15292 \times 10^{18}$。若以一秒搬动一个盘的速度来进行，则要搬动 60 个盘的 Hanoi 塔，需要：

$$T = \frac{1.15292 \times 10^{18}}{3.1536 \times 10^{7}} = 3.655885 \times 10^{10}（年）$$

解递推关系-例题（2）

[例]

$a_0, a_1, \cdots$满足条件

$$a_{n+1} = 2a_n + n \qquad (n \ge 0; a_0 = 1)$$

求该数列

解：设数列的母函数是 A(x)，

令$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$

$$\begin{array}{l} x^0 : a_1 = 2a_0 + 0 \\ x^1 : a_2 = 2a_1 + 1 \\ x^2 : a_3 = 2a_2 + 2 \\ + \quad \cdots \\ \hline \dfrac{A(x) - a_0}{x} = 2A(x) + \dfrac{x}{(1-x)^2} \end{array}$$

则

$$\frac{A(x) - 1}{x} = 2A(x) + \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$A(x) = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1-2x}$$

两边乘$(1-x)^2$，令$x = 1$，得$A = -1$。

两边乘$(1-2x)$，令$x = \frac{1}{2}$，得$C = 2$。

令$x = 0$，得$B = 0$。

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-2x} = -\sum_{k \ge 0} C_k^{2+k-1} x^k + 2\sum_{k \ge 0} (2x)^k \\ &= \sum_{k \ge 0} \left[-(k+1) + 2^{k+1} \right] x^k \\ &= \sum_{k \ge 0} (2^{k+1} - k - 1) x^k \end{aligned}$$

所以：

$$a_n = 2^{n+1} - n - 1$$

解递推关系–例题（3）

[例]

斐波那契数列

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad (n \ge 1; F_0 = 0; F_1 = 1)$$

求该数列

解：先变形递推公式为 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$，然后可得

$$\frac{F(x)-0-1\cdot x}{x^2}=\frac{F(x)-0}{x}+F(x)$$

$F(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$，令 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$， $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$F(x)=\frac{x}{(1-ax)(1-bx)}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{1-ax}-\frac{1}{1-bx})=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k\ge 0}(a^k-b^k)x^k$$

所以 $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n-b^n)$

Fibonacci 数
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

通用的方法是：

1）等式两边同时乘 x^n 然后对 n 求和；
2）计算和式得到母函数 A(x)满足的方程；
3）解方程得到显式的母函数公式；
4）展开母函数得到系数的表达式

7 整数的拆分

7.1 定义

[定义 1] 所谓整数的拆分是把正整数 n 分解成若干个正整数的和。

例如：整数 5 可以拆分成：

5，4+1，3+2，3+1+1，2+2+1，2+1+1+1，1+1+1+1+1，

[定义 2] 正整数拆分成若干个正整数的和，方案不一，不同的拆分法的数目称之为拆分数。

用 p(n)表示整数 n 拆分成若干正整数的和的方案数，例如 p(5)=7。

相当于把 n 个无区别的球放进 n 个无区别的盒子，盒子中允许放一个以上的球，当然，也允许空着。

[例]若有 1 克砝码 3 枚、2 克砝码 4 枚、4 克砝码 2 枚的砝码各一枚，问能称出那几种重量？各有几种方案？

解：

$$G(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(1+x^4+x^8)$$
$$=1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7$$
$$+5x^8+5x^9+5x^{10}+5x^{11}+4x^{12}+4x^{13}$$
$$+3x^{14}+3x^{15}+2x^{16}+2x^{17}+x^{18}+x^{19}$$

称 8 克的方案共有 5 种：

1+1+2+2+2，2+2+4，1+1+2+4，2+2+2+2，4+4

正整数拆分的求解可以归纳为：

若 a_r 为 r 拆分为由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，…，n_m 个 a_m 组成的集合中元素的和的拆分数，则序列 $\{a_r\}$ 的母函数为：

$$G(x)=\underbrace{(1+x^{a_1}+x^{2a_1}+\cdots+x^{n_1a_1})}_{n_1个a_1}\underbrace{(1+x^{a_2}+x^{2a_2}+\cdots+x^{n_2a_2})}_{n_2个a_2}\cdots\underbrace{(1+x^{a_m}+x^{2a_m}+\cdots+x^{n_ma_m})}_{n_m个a_m}$$

a_r 是 x^r 的系数。其中 r 和 a_1，a_2，…，a_m，n_1，n_2，…，n_m 都是正整数，n_1，n_2，…，n_m 可以是无穷大。

7.2 正整数拆分的性质

[**定理 1**] 令 $p(n)$ 为 n 的拆分数， $p_o(n)$ 为将 n 分成奇数且容许重复的拆分数，$p_d(n)$ 为将 n 分成互不相同部分的拆分数，那么 $p_o(n)=p_d(n)$。

证明：

$$\begin{aligned}G(x)&=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots\\&=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots\\&=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}\\&=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots\\&=(1+x+x^2+x^3\cdots)(1+x^3+x^6+x^9\cdots)\cdots\end{aligned}$$

右端是拆分成奇数和的拆分数的母函数。

[**定理 2**] n 拆分成其他数之和但重复数不超过 2，其拆分数等于它拆分成不被 3 除尽的数的和的拆分数。

证明：

n 拆分成重复数不超过 2 的数之和的拆分数，其母函数为：

$$
\begin{aligned}
G(x) &= (1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)(1+x^4+x^8)\cdots \\
&= \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}\cdot\frac{(1-x^2)(1+x^2+x^4)}{1-x^2}\cdot\frac{(1-x^3)(1+x^3+x^6)}{1-x^3}\frac{(1-x^4)(1+x^4+x^8)}{1-x^4}\cdots \\
&= \frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^9}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^{12}}{1-x^4}\cdots \\
&= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^4}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots \\
&= \prod_{\substack{k \\ k\neq 3m}}\left(\frac{1}{1-x^k}\right) \\
&= (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)\cdots
\end{aligned}
$$

［**定理 3**］ n 被拆分成其重复度不超过 k 次的数的和，其拆分数等于被拆分成不被 k+1 除尽的数的和的拆分数。

证明：

$$
\begin{aligned}
G(x) &= (1+x+x^2+\cdots x^k)(1+x^2+x^4+\cdots x^{2k})(1+x^3+x^6+\cdots x^{3k})\cdots \\
&= \frac{(1-x)(1+x+x^2+\cdots x^k)}{1-x}\cdot\frac{(1-x^2)(1+x^2+x^4+\cdots x^{2k})}{1-x^2}\cdot\frac{(1-x^3)(1+x^3+x^6+\cdots x^{3k})}{1-x^3}\cdots \\
&= \frac{1-x^{k+1}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{2(k+1)}}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^{3(k+1)}}{1-x^3}\cdots
\end{aligned}
$$

类似定理 2 的证明。

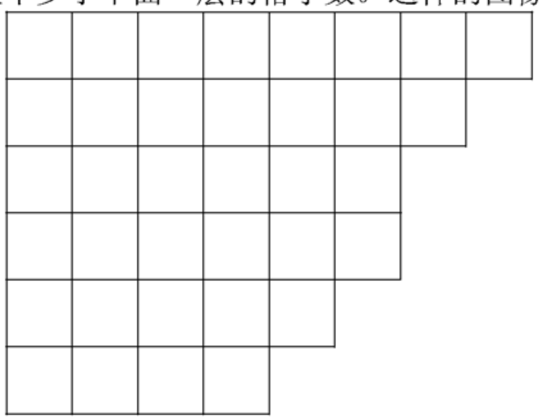
7.3 Ferrers 图像（Ferrers diagram）

Ferrers 图像是研究拆分的一种有效工具，假定 n 拆分成：

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

其中 $n_1 \ge n_2 \ge n_3 \ge \cdots \ge n_k$。

将它排列成阶梯形的，左边看齐，第 1 行 n_1 格，第二行 n_2 格，。。。，第 k 行 n_k 格。即上层的格子数不少于下面一层的格子数。这样的图像称为 Ferrers 图像。



Ferrers 图像有如下的一些性质：

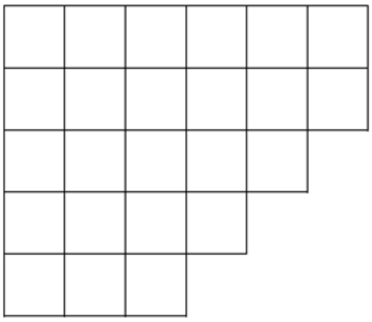
（1） 每一层至少有一个格子；

（2） 行与列互换，也就是沿对角线旋转 180 度的结果，仍然是 Ferrers 图像。后一个 Ferrers 图像称为前一个 Ferrers 图像的共轭图像，而且互为共轭。

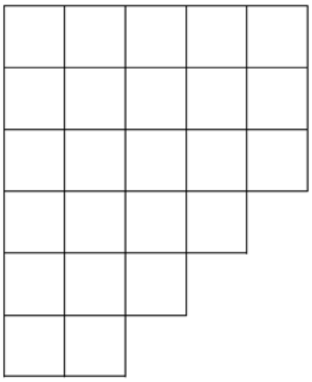
利用 Ferrers 图像可以推出如下关于正整数拆分的有趣结果，假定 k 和 n 都是正整数：

（1） 整数 n 拆分成 k 个数的和的拆分数，与将 n 拆分成最大数为 k 的拆分数相等。

由于 Ferrers 图像的共轭图像仍然是 Ferrers 图像。由 Ferrers 图像与其共轭图像的对应关系可以证明该结论。



$24=\underbrace{6+6+5+4+3}_{5\text{个数}}$ 最大数为 6



$24=\underbrace{5+5+5+4+3+2}_{6\text{个数}}$ 最大数为 5

（2） 整数 n 拆分成最多不超过 k 个数的和的拆分数，等于将 n 拆分成最大数不超过 k 的数的和的拆分数。

可以看作是（1）的推论。

（3） 整数 n 拆分成互不相同的若干个奇数和的拆分数，与 n 拆分成有自共轭 Ferrers 图像的拆分数相等。

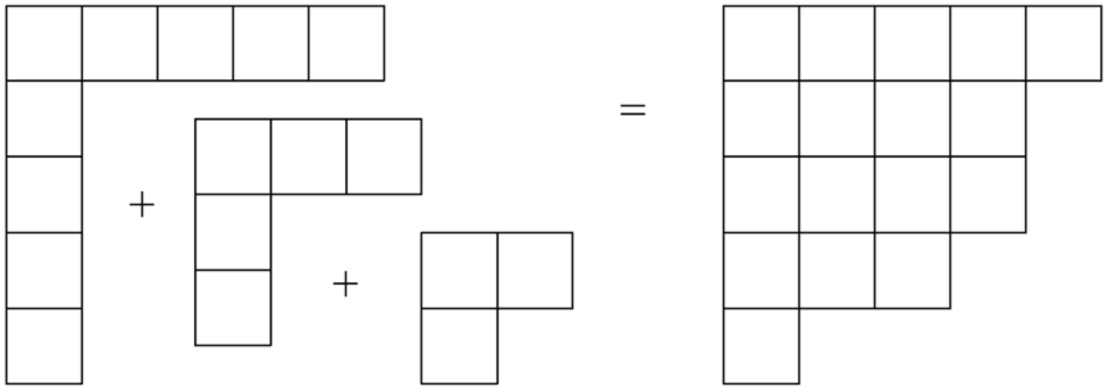
假定 n 拆分成 k 个互不相同的奇数：

$$2n_1+1，2n_2+1，\cdots，2n_k+1$$

不妨假定：

$$n_1>n_2>n_3>\cdots>n_k$$

可构造一自共轭的 Ferrers 图像。例如：
17=9+5+3



9 + 5 + 3 = 17

N 拆分成互不相同的奇数的和的拆分，与拆分成 Ferrers 图像为自共轭图像的拆分一一对应。反过来也是一样。

定理 4 正整数 n 拆分成不超过 k 个数的和的拆分数，等于将 n+k 拆分成正好 k 个数的拆分数。

拆分数的估计式：

正整数 n 拆分成若干正整数之和，其不同拆分数用 p(n)来表示。序列$\{p(n)\}$的母函数为：

$$G(x)=(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}\cdots(1-x^n)^{-1}=\prod_{k\geq 1}(1-x^k)^{-1}$$

下面是已知的几个拆分数：
p(10)=42，p(100)=190509292，p(200)=3972999029388

定理 6 $p_n < e^{\sqrt{\frac{20}{3}n}}$