应用组合数学

第二讲 排列与组合

何英华
天津大学计算机科学与技术学院
（hyh@tju.edu.cn，http://202.113.12.9/~hyh）

1 计数法则

1.1 加法法则

[加法法则] 设事件 A 有 m 种产生方式，事件 B 有 n 种产生方式，则事件 A 或 B 之一有 $m+n$ 种产生方式。

[例] 北京每天直达上海的客车有 5 次，客机有 3 次， 则每天由北京直达上海的旅行方式有 $5+3=8$ 种。

1.2 乘法法则

[乘法法则] 设事件 A 有 m 种产生式，事件 B 有 n 种产生方式，则事件 A 与 B 有 $m \cdot n$ 种产生方式。

[例] 从 A 到 B 有三条道路，从 B 到 C 有两条道路，则从 A 经 B 到 C 有 3×2=6 条道路。

[例] 求小于 10000 的含 1 的正整数的个数

解：小于 10000 的正整数有 9999 个

小于 10000 的不含 1 的正整数可看做 4 位数，但 0000 除外，故有 9×9×9×9－1＝6560 个.

小于 10000 的正整数或者含 1 或者不含 1，因此含 1 的有：9999－6560=3439 个

2 排列

2.1 几种排列

1．r-排列

[定义] 从 n 个不同的元素中，取 r 个不重复的元素，按次序排成一列，称为从 n 个元

素中取 r 个元素的**排列**。这些排列的个数用 $P(n,r)$表示。当 $r=n$ 时，称为**全排列**。

$$P(n,r)=P_r^n=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$P(n,r)$=将 r 个不同的球放入 n 个不同的盒子里，每盒至多 1 个的方案数。

2．Stirling 公式

在组合数学中经常遇到 n!的计数，随着 n 的增长，n!的增长也极快，Stirling 公式给出求 n!的近似公式，公式如下：

$$n!\sim\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Stirling 公式表明，即使 n 很小，$P(n,r)$也可以非常大。例如 60! $\approx 8.3094\text{X}10^{81}$，如果采用一台每秒生成 1 亿个排列的计算机来生成 60 个字符的全排列，则需要 $2.4386\text{x}10^{66}$ 年。

[例] A 单位有 7 位代表，B 单位有 3 位代表，排成一列，要求 B 单位的 3 个人排在一起，问有多少种不同的排列方案？

解：B 单位的 3 个人的某一排列作为一个元素参加单位 A 进行排列，可得方案为(7+1)!=8!

但 B 单位的 3 个人共有 3！种排列。

根据乘法法则，总的排列方案数为 8!X3!

3．可重复排列，

[定理] 从 n 个不同的元素中，取 r 个允许重复的元素，按次序排成一列，排列的个数为 n^r

n^r=将 r 个不同的球放入 n 个不同的盒子里，每盒球数不限的方案数。

[例] 电报能传输两种不同的信号：点和划。用这种符号对数字和英文字母编码，需要的符号串的长度是多少？

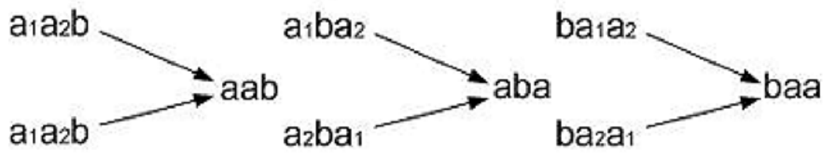
4．多重集的全排列

[定理] n 个元素中，属于第 1 类的元素有 n_1 个，第 2 类的元素有 n_2 个…，第 k 类的元素有 n_k 个，则这 n 个元素可区分的排列数为：

$$P(n;n_1,n_2,\cdots,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

[证明] 采用加下标的方法变为全排列，然后去掉重复

[例] 排列 2 个 a 和 1 个 b，求得到的可区分的排列数



$\frac{3!}{2!}=3$ 种

5．圆排列

[定理] 从 n 个不同的元素中，取 r 个沿一圆周排列，排列的个数为 $P(n,r)/r$ 个，记为 $Q(n,r)$。
[证明] 圆排列和线排列

[例] 5 对夫妇出席一宴会，围一桌坐下，试问有几种不同的方案？若要求每对夫妻相邻又有多少种不同的方案？

[解] 5 对夫妻 10 个人围圆桌而坐，则此问题相当于求 $Q_{10}^{10}=9!=362880$。

若加上限制条件：夫妻相邻而坐，则可以考虑为 5 个元素的圆排列，排列数为 4!。但两位夫妇可以交换座位，故根据乘法法则，总方案数为

$$2^5\cdot 4!=32\times 24=768$$

2.2 排列的生成算法

2.2.1 序数法

自然数的十进制表示法是最常用的，比如小于10^l的正整数 n，可用下列形式表示：

$$n=\sum_{k=0}^{l-1}a_k 10^k,\qquad 0\le a_k\le 9$$

介绍一种新的整数表示法，它的依据是：

$$n!=(n-1+1)(n-1)!=(n-1)(n-1)!+(n-1)!$$

同理 $(n-1)!=(n-2)(n-2)!+(n-2)!$

所以 $n!=(n-1)(n-1)!+(n-2)(n-2)!+(n-3)(n-3)!+\cdots+2\cdot 2!+2!=\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot k!+1$

即 $n!-1=(n-1)(n-1)!+(n-2)(n-2)!+(n-3)(n-3)!+\cdots+2\cdot 2!+1\cdot 1!$

上式和$10^n-1=9\cdot 10^{n-1}+9\cdot 10^{n-2}+\cdots+9$类似。不难证明，从 0 到$n!-1$的任何整数 m

可唯一地表示为：

$$m = a_{n-1}(n-1)! + a_{n-2}(n-2)! + \cdots + a_1 1!$$

其中 $0 \le a_i \le i$， $i = 1,2,\ldots,n-1$。

所以从 0 到 $n!-1$ 的 $n!$ 个整数与

$$(a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \cdots, a_2, a_1)$$

一一对应，另一方面，不难从 m 算出 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$。

可见，数 m 除以 2 的整数部分为

$$a_{n-1}\frac{(n-1)!}{2} + a_{n-2}\frac{(n-2)!}{2} + \cdots + a_3\frac{3!}{2} + a_2$$

M 整除以 2 的余数即为 a_1。

同理，再用 3 除，余数即为 a_2。余此类推。

$$n_1 = m$$

$$n_{i+1} = \left\lfloor \frac{n_1}{i+1} \right\rfloor, \qquad r_i = n_i - (i+1)n_{i+1}$$

即 n_{i+1} 为 n 对 i+1 作整数除法得到的商，而 r_i 为相应的余数。显然有：

$$a_1 = r_1, \qquad a_2 = r_2, \ldots$$

即

$$a_i = r_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n-1$$

[例]　$m = 4000$，即 $n_1 = 4000$

$$n_2 = \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor = 2000, \qquad r_1 = 0$$

$$n_3 = \left\lfloor \frac{n_2}{3} \right\rfloor = 666, \qquad r_2 = 2$$

$$n_4 = \left\lfloor \frac{n_3}{4} \right\rfloor = 166, \qquad r_3 = 2$$

$$n_5 = \left\lfloor \frac{n_4}{5} \right\rfloor = 33, \qquad r_4 = 1$$

$$n_6=\left\lfloor\frac{n_5}{6}\right\rfloor=5,\qquad r_5=3$$

$$n_7=\left\lfloor\frac{n_6}{2}\right\rfloor=0,\qquad r_6=5$$

所以 $4000=5\cdot 6!+3\cdot 5!+4!+2\cdot 3!+2\cdot 2!$

满足条件

$$0\le a_i\le i,\qquad 1\le i\le n-1$$

的序列

$$(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1)$$

共有n!个，正好和从0到n!-1之间的正整数一一对应。下面试图将n-1个元素的序列

$$(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1)$$

与n个元素的排列建立起一一对应关系，从而从序列（*）得到一种生成排列的算法。为了方便起见，不妨令n个元素为1，2，…，n。

对应的规则如下：

设序列（*）对应的某一排列 $p=p_1p_2\cdots p_n$，其中 a_i 可以看做是排列p中数i+1所在位置右边比i+1小的数的个数。

以排列4213为例，它是元素1，2，3，4的一个排列。4的右边比4小的数的数目为3，所以 $a_3=3$。3右边比3小的数的数目为0，即 $a_2=0$。同样，2的右边比2小的数的数目为1，即 $a_1=0$。所以排列4213对应于301。即

$$p=(4213)\Leftrightarrow(a_3a_2a_1)=(301)$$

反过来也可以从（301）获得排列（4213）。

以 $a_3a_2a_1=021$ 为例，$a_3=0$，故在下面格子中最后一格填上4。

			4

又 $a_2=2$，故从右到左留下两个空格，在第一个格中填上3。又 $a_1=1$，故从右向左留下一个空格，在第2格填上2，得

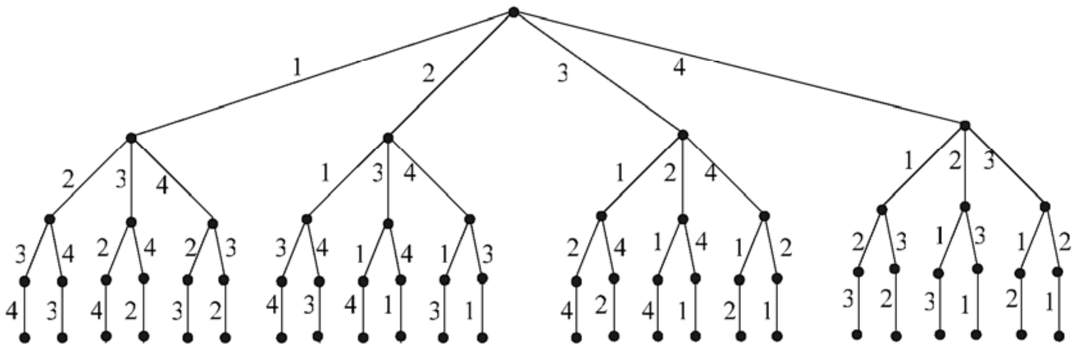
3	2		4

最后一空格填上1，得一排列

3	2	1	4

2.2.2 字典序法

最直观的一种生成排列的方法



1 2 3 4，1 2 4 3，1 3 2 4，1 3 4 2，1 4 2 3，1 4 3 2，
2 1 3 4，2 1 4 3，2 3 1 4，2 3 4 1，2 4 1 3，2 4 3 1，
3 1 2 4，3 1 4 2，3 2 1 4，3 2 4 1，3 4 1 2，3 4 2 1，
4 1 2 3，4 1 3 2，4 2 1 3，4 2 3 1，4 3 1 2，4 3 2 1

教材的 P27

按字典顺序排列的，由一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 生成下一个排列的算法如下：

（1）求满足关系式 $p_{j-1}<p_j$ 的 j 的最大值，设为 i，即

$$i=\max\{j\mid p_{j-1}<p_j\}$$

（2）求满足关系式 $p_{i-1}<p_k$ 的 k 的最大值，设为 j，即

$$j=\max\{k\mid p_{i-1}<p_k\}$$

（3）p_{i-1} 与 p_j 互换，得 $(\overline{p})=\overline{p}_1\overline{p}_2\cdots\overline{p}_n$。

（4）$(\overline{p})=\overline{p}_1\overline{p}_2\cdots\overline{p}_{i-1}\overline{p}_i\overline{p}_{i+1}\cdots\overline{p}_n$ 中 $\overline{p}_i\overline{p}_{i+1}\cdots\overline{p}_n$ 部分的顺序逆转，得到的 $\overline{p}_1\overline{p}_2\cdots\overline{p}_{i-1}\overline{p}_n\cdots\overline{p}_{i+1}\overline{p}_i$ 便是所求的下一个排列。

设 $p_1p_2p_3p_4=3421$。

（1）$i=\max\{j\mid p_{j-1}<p_j\}=2$；

（2）$j=\max\{k\mid p_{i-1}<p_k\}=2$；

（3）p_1 与 p_2 互换得 4321；

（4）4321 中的 321 的顺序逆转得下一个排列

4　1　2　3

2.2.3 换位法

以初始排列 1234 为例，在各数上方加一箭头 $\leftarrow$，如

$$\overleftarrow{1}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{3}\ \overleftarrow{4}$$

当箭头所指一侧，相邻的数比较小时，称该数处于活动状态。例如，在$\overleftarrow{1}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{3}\ \overleftarrow{4}$中 2，3，4 都处于活动状态。

下面描述从排列 $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ 生成下一个排列的步骤：

（1）若在 $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ 中无一处于活动状态则停止；

（2）求处于活动状态各数中的数值最大者，设为 m，m 和它箭头所指一侧相邻数互换位置。

（3）比 m 大的数一律改变箭头的指向；转（1）

$$\overleftarrow{1}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{3}\ \overleftarrow{4} \qquad \{2，3，4\}$$

$$\overleftarrow{1}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{3}\ \overleftarrow{4} \qquad \{4,2\}$$

3 组合

3.1 几种组合

1．*r*-组合

[定义] 从 n 个不同元素中取 r 个不重复的元素组成一个子集，而不考虑其元素的顺序，称为从 n 个中取 r 个的**组合**，组合的个数用 $C(n,r)$ 表示， $C(n,r)$ 也称为二项式系数。

$$C(n,r) = C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$C(n,r)$=将 r 个相同的球放入 n 个不同的盒子里，每盒至多 1 个的方案数。

$$P(n,r)= C(n,r) \cdot P(r,r)$$

[例] 某车站有 6 个入口处，每个入口处每次只能进一人，一组 9 个人进站的方案有多少？
解：进站方案可表示为 12300450607089， 其中 1-9 表示人，0 表示入口，注意 6 个入口只用 5 个 0。任意进站方案可表示成上面 14 个元素的一个排列。

[解法 1] 对 0 标号，可产生 5!个 14 个元素的全排列。若设 x 为所求方案，则 $x \cdot 5!=14!$， 因此可得：$x=14!/5!=726485760$

[解法 2] 在 14 个元的排列中先确定入口的位置，有 $C(14,5)$种选择，再确定人的位置，有 9！种选择。故 $C(14,5)\cdot 9!$即所求

[解法 3] 把全部选择分解成若干步，使每步宜于计算。1 有 6 种选择；2 除可有 1 的所有选择外，还可（也必须）选择当与 1 同一入口时在 1 的前面还是后面，故 2 有 7 种选择；3 的

选择方法同 2，故共有 8 种。以此类推，9 有 14 种选择。故所求方案数为 6X7X8X9X11X12X13X14

2．可重复组合

[定理] 从 n 个不同的元素中取 r 个进行组合，若允许重复，则组合数为 $C(n+r\text{-}1,r)$

[证明一] 允许重复的组合与 $n+r$-1 个不同的元素中取 r 个作不重复的组合一一对应
[证明二] n 个不同的元素用不同的符号表示，例如 3 个元素 abc 中取 4 个的组合 aaac。如用 n-1 个|分割，该组合可表示为 aaa||c。这样元素间的区分可以略去，进一步表示为 xxx||x。问题转换成为 n-1+r 个位置中取 r 个的组合数。

$C(n+r\text{-}1,r)$=将 r 个相同的球放入 n 个不同的盒子里，每盒球数不限的方案数。

[例] 试问(x+y+z)4 有多少项？

解：结果是一个 4 次齐次多项式，每项相当于从 3 个元素中取 4 个的可重复组合，例如 x^2yz 中选择 2 次 x，y 和 z 各选一次。可以列出所有的项如下：

$$x^4y^0z^0,\quad x^3y^1z^0,\ x^3y^0z^1,\ x^2y^2z^0,\ x^2y^1z^1,\ x^2y^0z^2,\ \ldots$$

上述结果很容易推广到一般的情况：试问$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^r$ 有多少项?

3. 不相邻的组合

指的是从序列 $A=\{1,2,....,n\}$ 中取 r 个，其中不存在 i，i+1 两个相邻的数同时出现于一个组合中的组合。例如，$A=\{1,2,3,4,5,6\}$，取 3 个做不相邻的组合。

$\{1,3,5\}$，$\{1,3,6\}$，$\{1,3,7\}$，$\{1,4,6\}$，$\{1,4,7\}$，$\{1,5,7\}$，$\{2,4,6\}$，$\{2,4,7\}$，$\{3,5,7\}$，

[定理] 从 $A=\{1,2,....,n\}$ 中取 r 个做不相邻的组合，其组合数为 $C(n-r+1,r)$。

[证明] 建立起从 $A=\{1,2,....,n\}$ 中取 r 个做不相邻的组合与从 n-r+1 个不同元素中取 r 个元素的组合之间的一一对应关系。

4. 多重集的组合

[定理] n 个元素，属于第一类的元素有 n_1 个，第二类的元素有 n_2 个，....，第 k 类的元素 n_k 个，则从这 n 个元素中取 r 个进行组合，组合数为

$$C(k+r-1,r)$$

相当于从 k 个元素中取 r 个元素的可重复的组合。

3.2 组合的生成算法

规律比较明显

倒数第 k 位（$k \le r$）不得超过$n-k+1$。

(1) 若第 r 个元素组合用$C_1C_2\cdots C_r$表示，并且不妨假定

$$C_1 < C_2 < \cdots < C_r$$

即$C_r \le n$，$C_{r-1} \le n-1$，…，$C_1 \le 1$。或表以$C_i \le n-r+i$，$i=1,2,...,r$。

(2) 当存在$C_j \le n-r+j$时，其中下标的最大者设为 i，即$i=\max\{j \mid C_j < n-r+j\}$，

则作$C_i \leftarrow C_i+1$，与之相应的，作

$C_{i+1} \leftarrow C_i+1$，$C_{i+2} \leftarrow C_{i+1}+1$，…，$C_r \leftarrow C_{r-1}+1$

例如求 256 的下一个组合，C_3已经达到最大值 5 和 6，那么C_1从 2 修改为 3，C_2，C_3作相应的修改，分别改为 4 和 5，即 256 的下一个组合为 345。

归纳从一个组合$C_1C_2\cdots C_r$得到下一个组合的步骤如下：

（1） 求满足不等式$C_j \le n-r+j$的最大下标 i，即

$i=\max\{j \mid C_j < n-r+j\}$

（2）$C_i \leftarrow C_i+1$

（3）$C_j \leftarrow C_{j-1}+1, j=i+1,i+2,...,r$。

4 二项式系数

4.1 二项式定理

[二项式定理] 设 *n* 为正整数，则对所有 x,y，

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

[证明] 组合方法，xn-kyk 和 n 个(x+y)

4.2 多项式系数

[定理] 令 $C(n; n1,n2,\cdots,nk)$=将 n 个不同的球放入 k 个不同的盒子里，其中 $n1$ 个球放入盒子 1 中，… ，nk 个球放入盒子 k 中的方案数。则：

$$C(n;n_1,n_2,\cdots,n_k)=\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

$C(n; n1,n2,\cdots,nk)$也称为多项式系数。

[证明] $C(n; n1,n2,\cdots,nk)=C(n,n1)XC(n-n1,n2)\cdots$

[定理] $C(n; n1,n2,\cdots,nk)= P(n;\ \mathrm{n}1,n2,\cdots,n\mathrm{k})$

[证明一] 代数方法

[证明二] 组合方法：n 个位置来放置排列，其中 nk 个位置被用来放置 nk 个第 k 类对象

4.3 多项式定理

[多项式定理] 设 n 为正整数，则对 x1,x2,…,xk，

$$(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2+\cdots+\mathrm{x}_\mathrm{k})^\mathrm{n}=\sum\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_k}\mathrm{x}_1^{\mathrm{n}_1}\mathrm{x}_2^{\mathrm{n}_2}\cdots\mathrm{x}_\mathrm{k}^{\mathrm{n}_\mathrm{k}}$$

其中 $n_1+n_2+\cdots+n_\mathrm{k}=n$。

[证明] 类似二项式定理

[例] 求$(x+y+z)^4$

4.4 牛顿二项式定理

[二项式定理] 设 α 为实数，则对所有 $0\leqslant|x|<|y|$，

$$(\mathrm{x}+\mathrm{y})^\alpha=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\mathrm{x}^\mathrm{k}\mathrm{y}^{\alpha\text{-}\mathrm{k}}$$

其中

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

[例] 求$(1+x)^{-n}$ ，$(1+x)^{-1}$， $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots$

5 恒等式

恒等式的三种证明方法

证明涉及二项式系数的恒等式时，可以考虑以下三种方法：

1、组合方法

计算选择某些集合的方法数

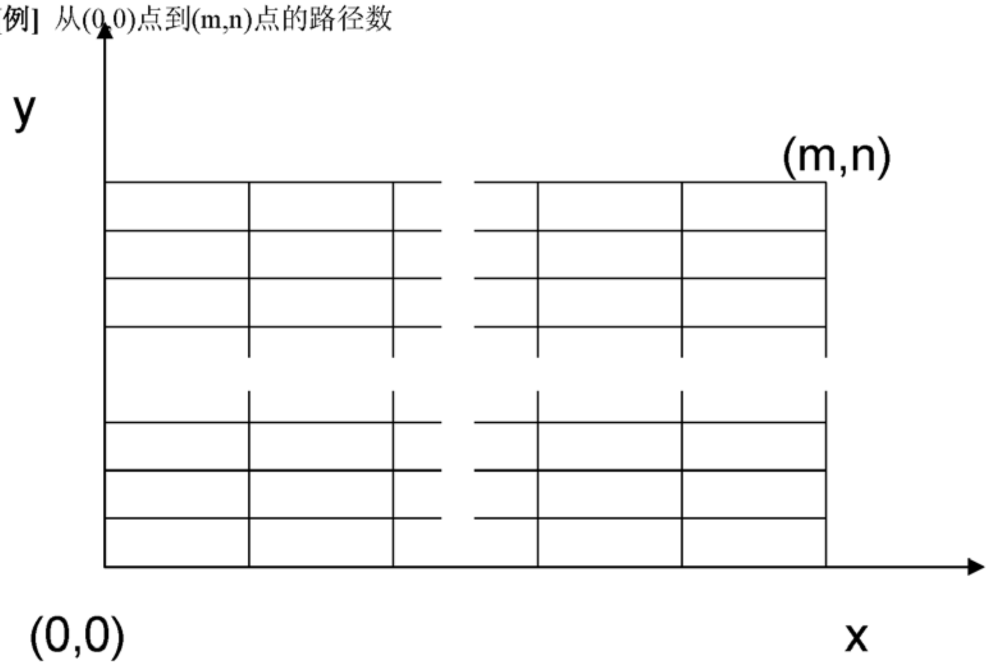
2、代数方法

进行阶乘关系式变换

3、几何方法

变换为计算路径数

[例] 从(0,0)点到(m,n)点的路径数



解：与 m 个 x、n 个 y 的排列建立一一对应，可得路径数为：$P(m+n;m,n)=C(m+n;m,n)=C(m+n,m)=C(m+n,n)$

[例]

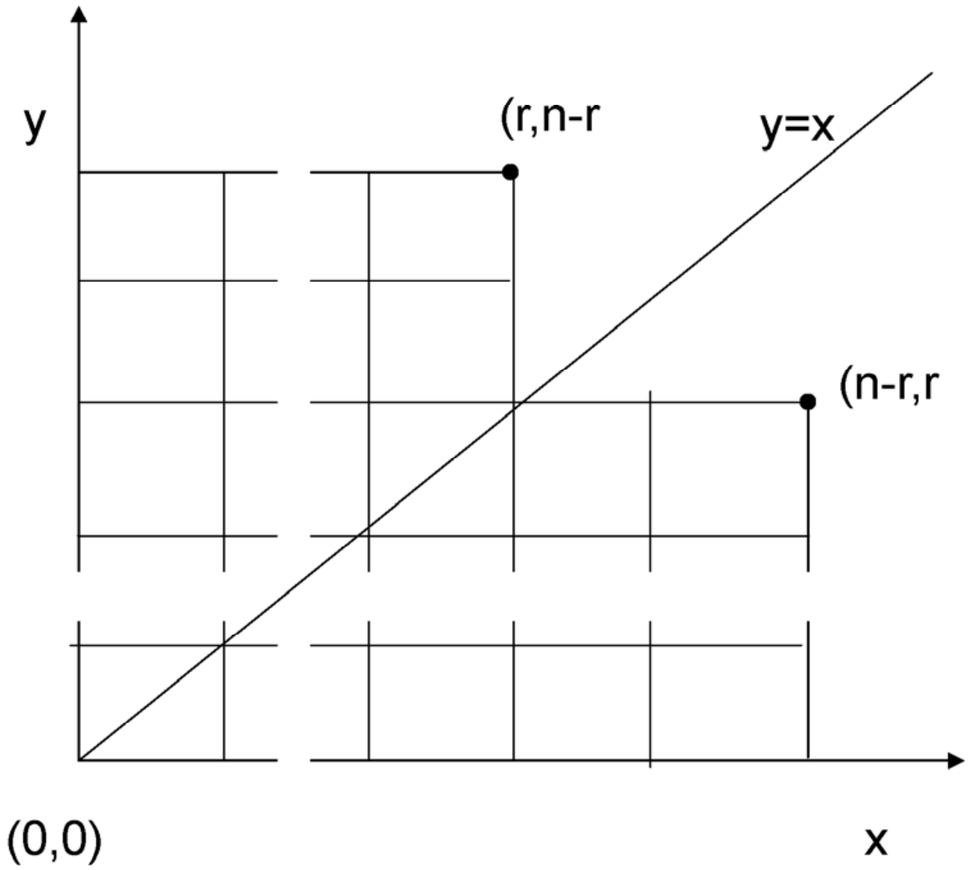
$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \qquad (1)$$

[证明一] 从 n 个元素中取走 r 个，余下的元素个数为 $n\text{-}r$ 个

[证明二] 展开 $C(n,n\text{-}r)$

[证明三] C(n,r)表示从(0,0)点到(n-r,r)点的路径数,C(n,n-r)表示从(0,0)点到(r,n-r)点的路径数。

（1）的几何证明



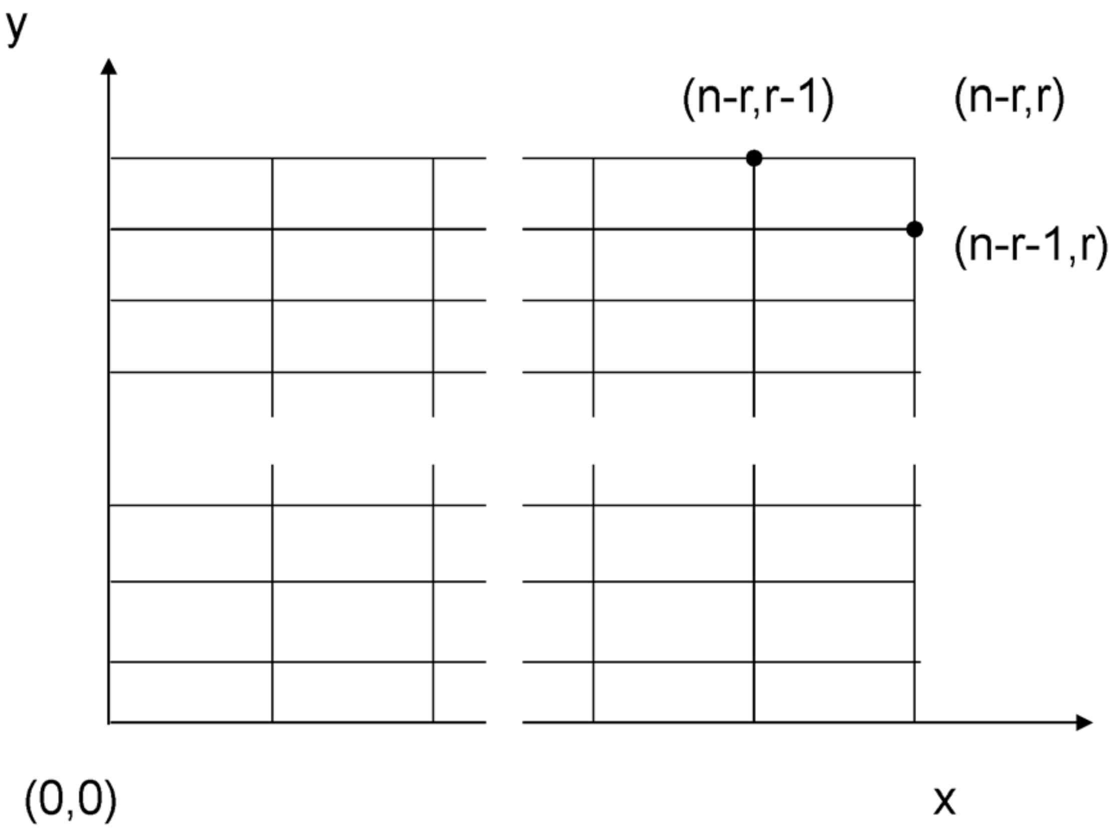
[例]

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$$

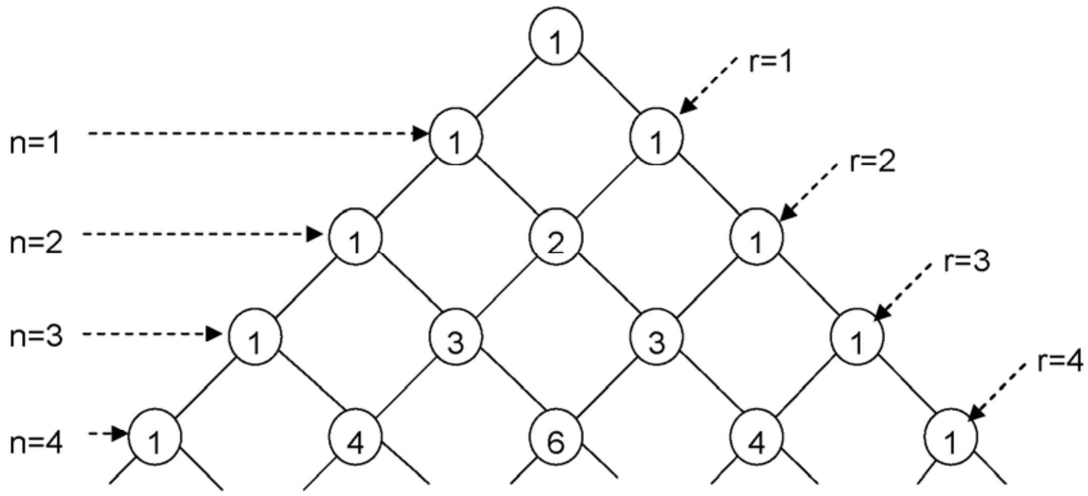
[证明一] 设 n 个元素为 a1,a2,..,an,。从 n 个元素中取走 r 个，就其中元素 a1 来看可以分为两类：1）组合中不含有元素 a1; 2）组合中含有元素 a1。

[证明二] 展开等式右边

[证明三]从(0,0)点到(n-r,r)点的路径经过(n-r-1,r)点或者 (n-r,r-1)点



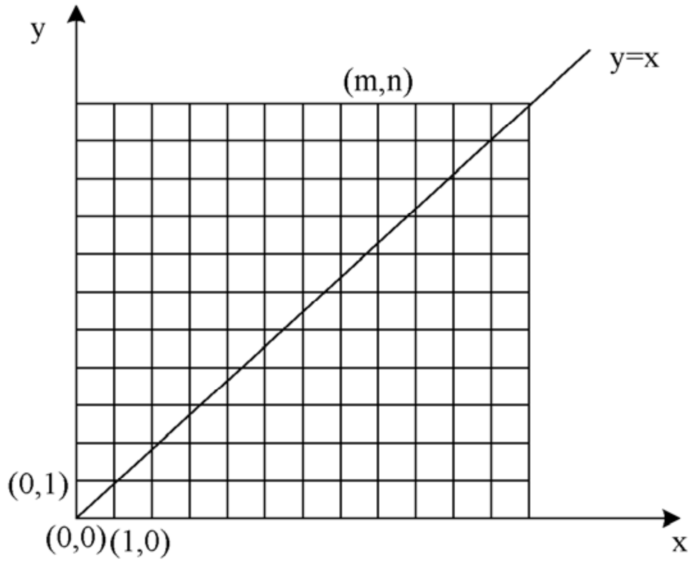
Pascal 三角



教材 P35-46 的十个恒等式。

6 应用举例

[例] 从（0,0）点到达（m,n）点，其中 $m<n$，要求中间所经过的路径上的点（a,b）恒满足 $a<b$，问有多少种不同的路径？



解：$(0,0) \to (m,n)$，如果要求$a < b$，那么等价于$(0,1) \to (m,n)$。

$(0,1) \to (m,n)$ 总的路径数=$(0,1) \to (m,n)$（$a < b$）路径数

$+(0,1) \to (m,n)$（$a \ge b$）路径数

假设$(0,1) \to (m,n)$（$a \ge b$）的某一条路经与$y = x$线的交点分别为P_1，P_2，…，P_k。

下面证明从$(0,1) \to (m,n)$的路径对应于一条$(1,0) \to (m,n)$的路径。

从$(1,0) \to (m,n)$的路径必穿过$y = x$，对应于一条$(0,1) \to (m,n)$（$a \ge b$）的路径。

因此，总的路径数为：

$(0,1) \to (m,n)$ 总的路径数=$(0,1) \to (m,n)$（$a < b$）路径数

$+(0,1) \to (m,n)$（$a \ge b$）路径数

$$=\binom{m+n-1}{m}-\binom{m+n-1}{m-1}$$

$$=\frac{(m+n-1)!}{m!n!}(n-m)$$

[例]P52 例 1.34

[例] 涂色问题

用 m 种颜色去涂$2 \times n$棋盘，使得相邻的格子异色的涂色方法数？

				…		
				…		