应用组合数学

第1讲 引 言

何英华

（天津大学计算机科学与技术学院 ）

（hyh@tju.edu.cn）

http://202.113.12.9/~hyh

例1 设计实验（药品效果试验）

- 5种药　：1，2，3，4，5
  5个病人：A，B，C，D，E
- 设计实验方案检验5种药的疗效。

方案一

A	B	C	D	E
1	2	3	4	5

方案二

	一	二	三	四	五
A	1	2	3	4	5
B	1	2	3	4	5
C	1	2	3	4	5
D	1	2	3	4	5
E	1	2	3	4	5

例1 设计实验（药品效果试验）

- 满足的条件为：没有任何两个人在同一天尝试同一种药物。

1. 是否存在这样的方案？
2. 如果存在的话，共有多少种这样的方案？

方案三

	一	二	三	四	五
A	1	2	3	4	5
B	2	3	4	5	1
C	3	4	5	1	2
D	4	5	1	2	3
E	5	1	2	3	4

例2 编码问题

- 一位：0或1。位串是一个位序列，如0001，1101，1010。
- 对26个英文字母进行编码。Morse电码的编码方式：
  O:111，A:01，K:101，C:1010

约束：位串至多为两位。

-----无解！(6个)

约束：位串至多为三位。

-----无解！(14个)

至少需要多少位呢？

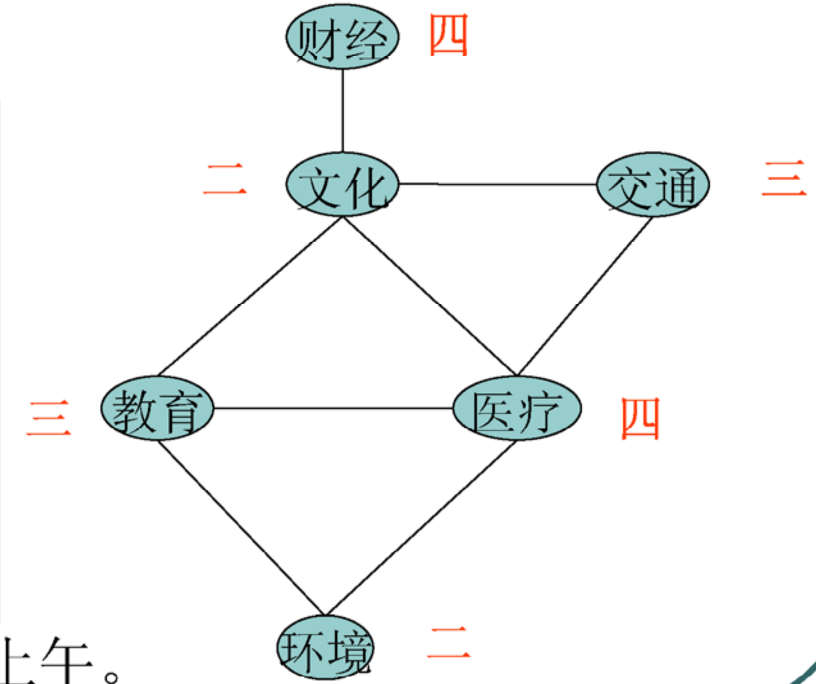
----- 4位

1. 是否存在满足条件的编码方案？
2. 至少需要几位？

例3 安排会议

- 假设需要安排以下几个主题会议：财政、环境、医疗、交通、教育和文化。
- 下表表示了两个会议的委员会是否具有共同的成员。

	财经	环境	医疗	交通	教育	文化
财经	0	0	0	0	0	1
环境	0	0	1	0	1	0
医疗	0	1	0	1	1	1
交通	0	0	1	0	0	1
教育	0	1	1	0	0	1
文化	1	0	1	1	1	0



- 开会时间：星期二、三、四的上午。

例3 会议安排

- 限制某些会议的安排时间
  交通：星期二和星期四
  教育：星期三
  这个问题是无解的！
- 会议希望被安排的时间

会议	财经	环境	医疗	交通	教育	文化
时间	二	四	四	二	二	三

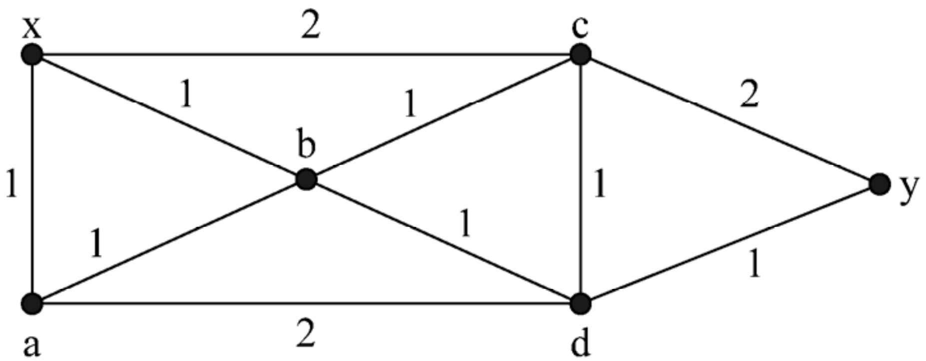
给出一种安排，使得能够最大程度上满足会议的要求。

所有的方案

	二	三	四	满足程度的个数
1	交通、教育	环境、文化	财经、医疗	4
2	交通、教育	财经、医疗	环境、文化	3
3	环境、文化	交通、教育	财经、医疗	1
4	环境、文化	财经、医疗	交通、教育	0
5	财经、医疗	交通、教育	环境、文化	2
6	财经、医疗	环境、文化	交通、教育	2
7	交通、教育、财经	医疗	医疗	5
8	交通、教育、财经	交通、教育、财经	环境、文化	4
9	环境、文化	环境、文化	医疗	1
10	环境、文化	医疗	交通、教育、财经	0
11	医疗	交通、教育、财经	环境、文化	1
12	医疗	环境、文化	交通、教育、财经	1

例4 最短路径问题

- 寻找从x到y的最短路径



- 列出从x到y的所有路径

x-c-y(4)，x-c-d-y(4)，x-c-b-d-y(5)，x-c-b-a-d-y(7)，x-b-d-y(3)，x-b-a-d-y(5)，…

例5 八皇后问题

- 在8X8格的国际象棋上能否摆放八个皇后，使其不能互相攻击，即任意两个皇后都不能处于同一行、同一列或同一斜线上？
- 在8X8格的国际象棋上能否摆放八个皇后，使其不能互相攻击，有多少种摆法？
- 在8X8格的国际象棋上可以最多摆放多少个皇后，使其不能互相攻击？

例子中所包含的三个问题

- <u>存在性问题：</u>根据给定的一些条件，判断是否存在满足条件的方案；
- <u>计数问题：</u>如果方案存在的话，那么共有多少种方案；
- <u>最优化问题：</u>在所有的方案中，找到满足条件的最优方案。

如何求解这三个问题

- 问题不陌生
- 存在最基本的方法：

“数一数”

- 如何处理大规模问题？
- 如何有效地得到满足条件的方案？

例2 编码问题

- 计算机内的字符编码。

a~z，A~Z，0~9，ESC，SPACE，~，!等共96个字符。

ASCII码（7位），最多表示128个字符。

- 汉字编码（2万多个汉字）

GBK，UNICODE都采用16位。

学生的考试安排

- 班级：C1，C2，C3，C4，….
- 考试科目：S1，S2，S3，S4，….
- 教室：R1，R2，R3，R4，….
- 考试时间：T1，T2，T3，T4，….

如何安排？

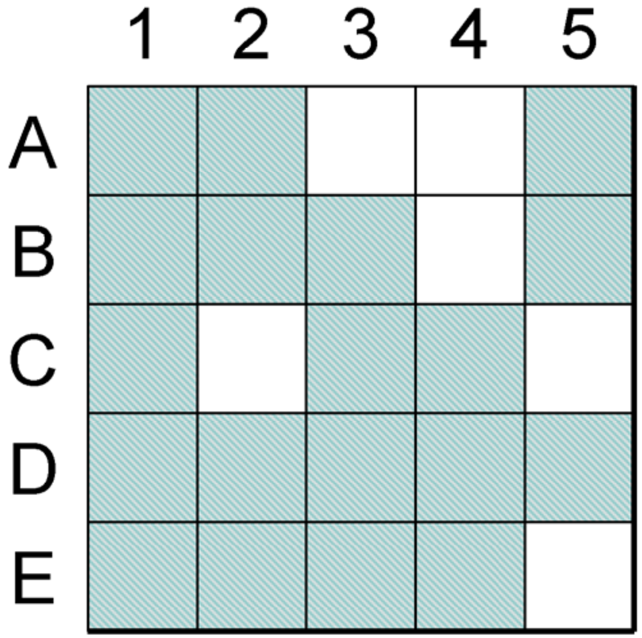
目录

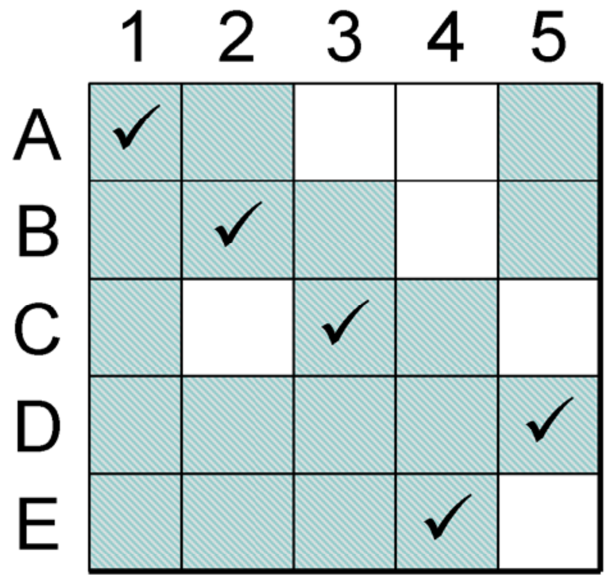
- 组合数学的基本问题
- 组合数学的发展历史
- 组合数学的国内外概况
- 课程提纲

组合数学的基本问题

- 广义：组合数学是以代数、数论、拓扑、概率论等学科为主要研究工具，以计算机科学和信息科学中的问题为研究背景，以离散结构为主要研究对象的一门学科。
- 狭义：组合数学主要研究满足一定条件的组态（一种安排）的存在性、计数、构造及优化等方面的问题。
- 组合数学是信息时代的数学。
- 主要关注以下三种问题：
  存在性问题：这种安排是否存在？
  计数问题：　如果存在，那么有多少种？
  优化问题：　如何找到符合某些标准的最佳安排？
- 组合数学大体上可分为组合计数、组合设计、组合矩阵、组合优化等方面。

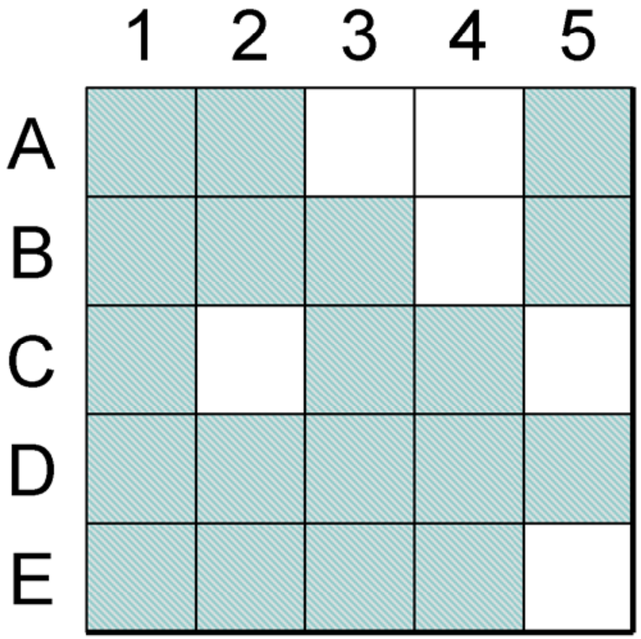
组合数学问题解决举例

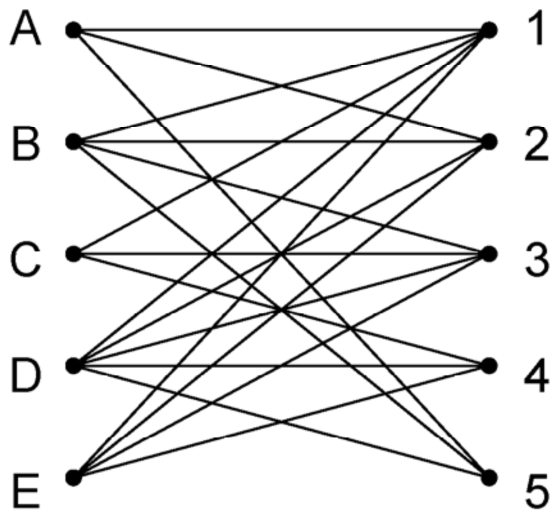




在棋盘上放置5只车，使任何一只车都不能吃掉另一个

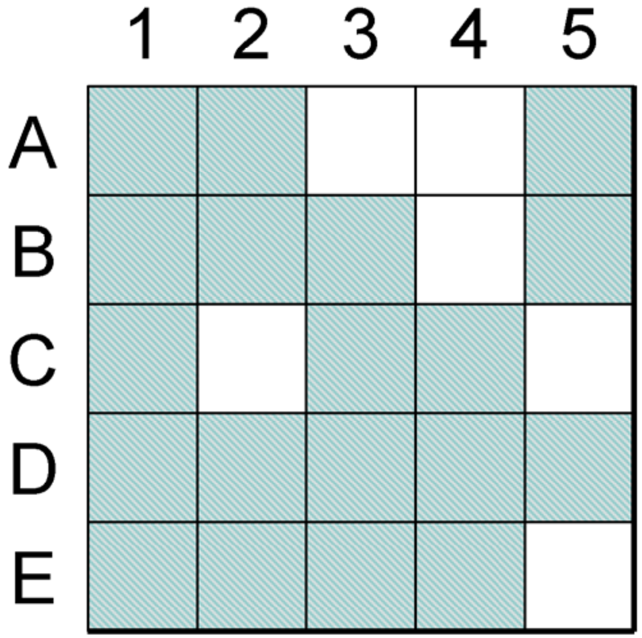
存在性问题

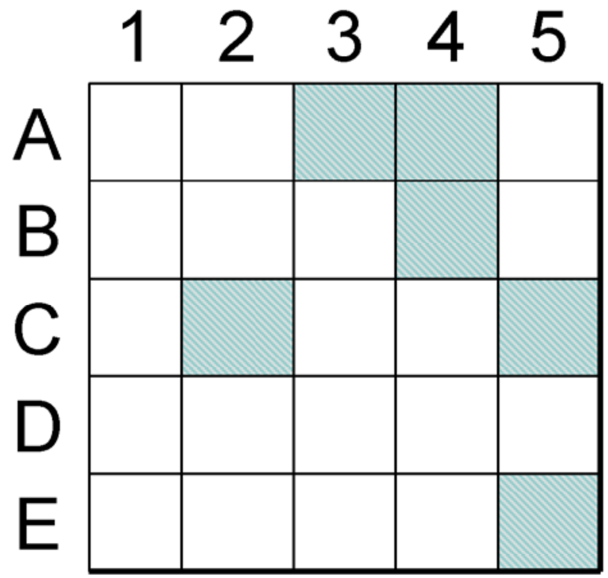




转化为图论问题：判断二部图$G=(X,Y,E)$中是否存在一个饱和X的匹配M

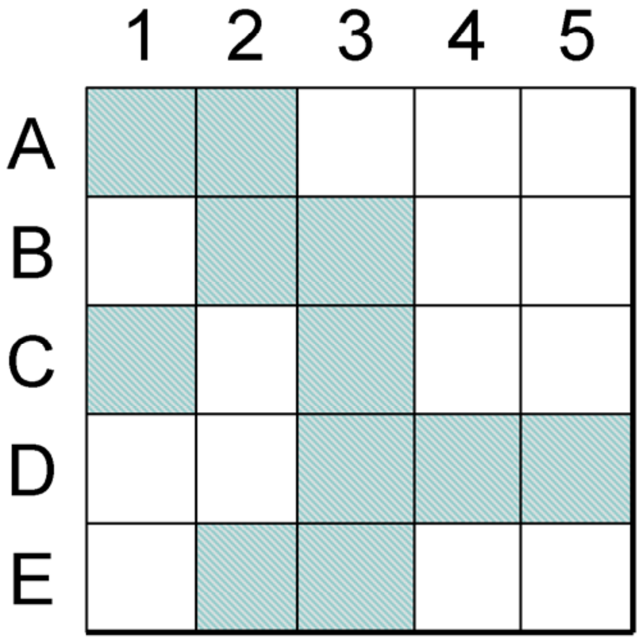
计数问题

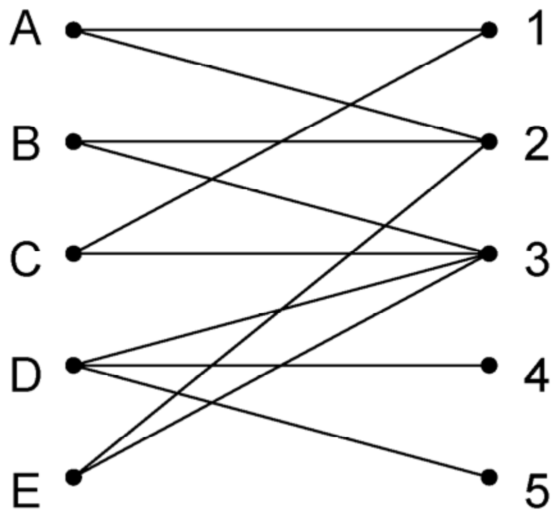




转换为有禁区的排列问题，求出右图对应的棋盘多项式

优化问题





转化为求二部图的最大匹配，可以用算法找出具体的最大匹配

组合数学的发展历史（三个阶段）

- 组合数学是一个古老而又年轻的数学分支。组合数学既有悠久史，又是随着计算机科学的产生而迅速发展起来的一门新兴学科。
- 古典阶段（17世纪60年代以前）：

  G. W. Leibniz《论组合的艺术》和Pascal《论算术三角形》为标志。

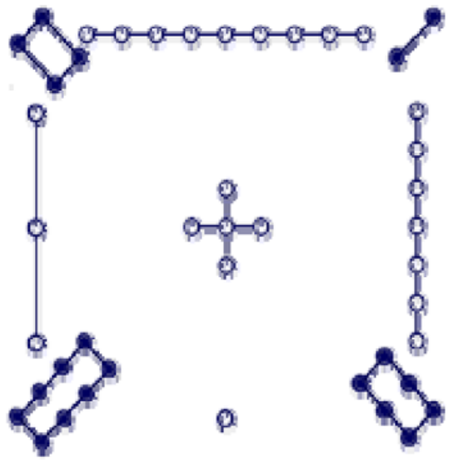
  主要研究内容：排列数与组合数的计算公式，排列数或组合数之间的关系以及整数拆分等问题。中外历史上许多著名的游戏是它古典部分的主要内容。
- 近代阶段（17世纪60年代至20世纪60年代）：

  迅速发展的阶段，形成了一般的存在性定理和计算原理。但是内容和方法上，基本以初等方法为主。
- 现代阶段（20世纪60年代以后）

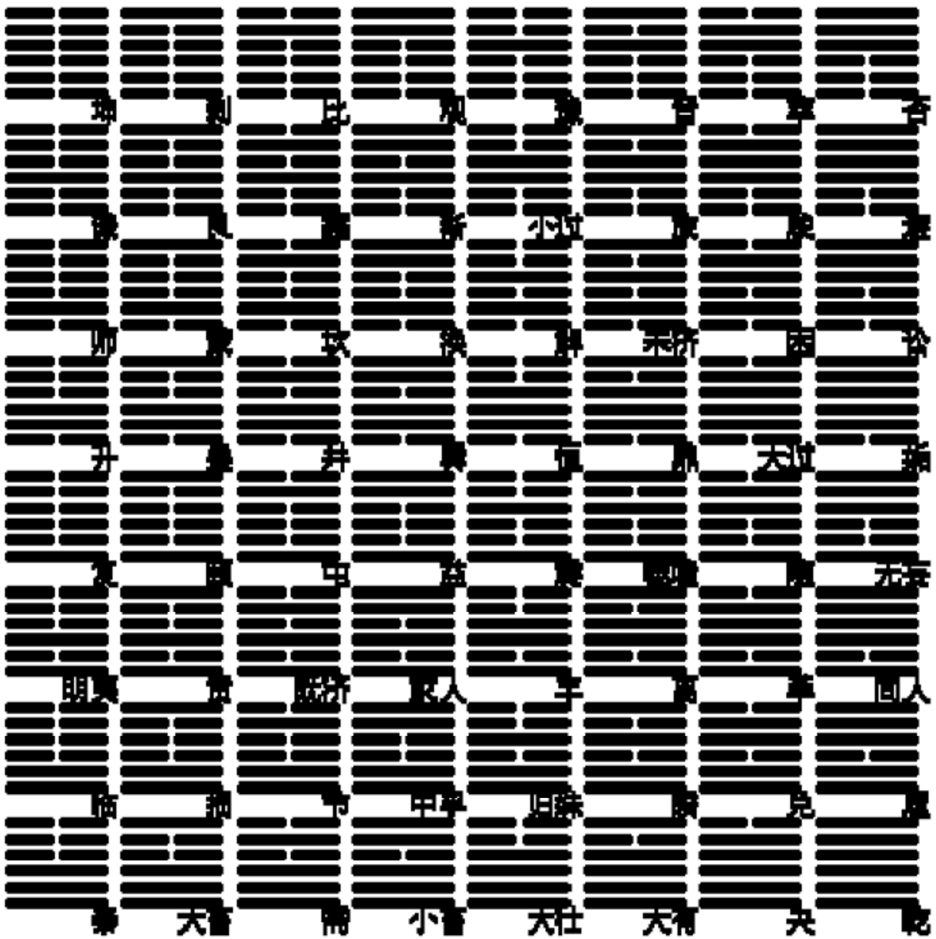
  随着计算机科学的兴起，组合数学得到了空前的发展。目前，由于组合数学涉及面广，内容庞杂，并且仍在快速发展，因而还没有形成一个象数学分析一样统一而有效的理论体系。

古典阶段——洛书

- 相传在大禹治水时代（约公元前2200年），在洛水中曾发现过一只神龟，它的背上有被称为洛书的图样，国际上已公认它是组合数学的最早渊源。
- 洛书可以看作是一个3阶方阵，其元素是1到9的正整数，每行、每列以及两条对角线的和都是15。象洛书这种类型的数阵现在被称为幻方。



4	9	2
3	5	7
8	1	6

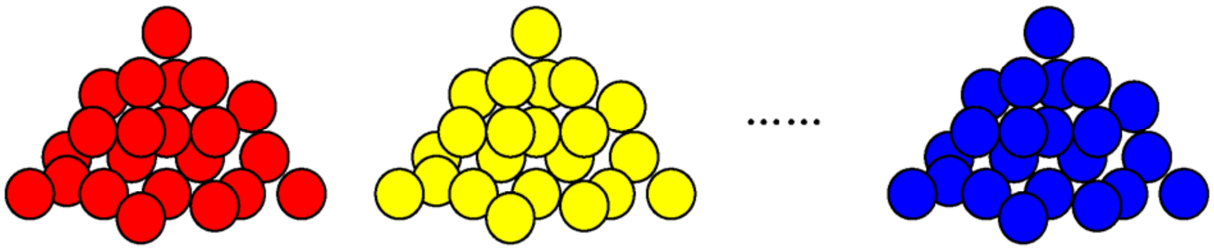


根据传说，周文王（约公元前1100年）在被殷纣王囚禁时将八卦推演成了六十四卦，这暗示我国很早就有了排列的概念。阳爻（——）阴爻（— —）

- 北宋数学家**贾宪**（11世纪中期）创制了“开方作法本源”图， 但其著作已经失传。
- 这幅图现见于南宋数学家**杨辉**的著作《详解九章算法》(1261)中，但杨辉在引用了这幅图后特意说明：“贾宪用此术”。
- 元代数学家**朱世杰**的著作《四元玉鉴》(1303)中也有此图。
- 二项式系数的意义是从n件物件中选取k件的方法总数。二项式系数是现代组合数学的早期发现之一。

组合游戏

- “抓三堆”游戏（Nim game）：



n_1　　n_2　　……　　n_k

两人从中轮流抓取，每次只能在其中一堆中抓取，至少取一个，最多取一堆，谁最后取完谁获胜。

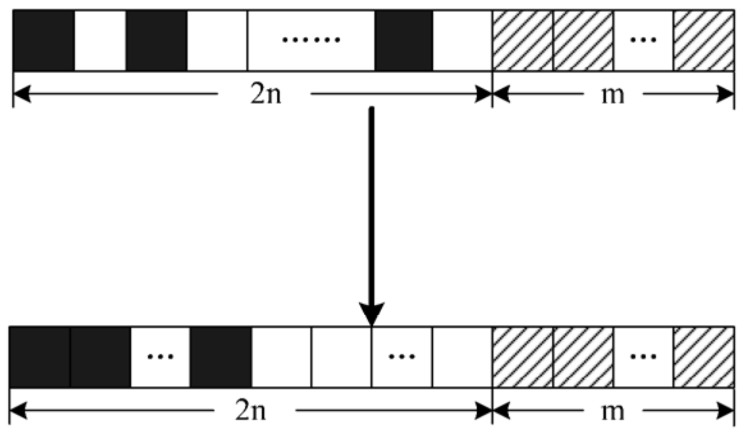
组合游戏—移棋问题

规则：

- 每一步将依次相邻的m个棋子移入到空格内，留下m个新空格，被移棋子的相对位置保持不变。
- 被移动的m个棋子不得与将要移动的空格相邻，即这m个棋子必须是“隔子跳入”到空格的。

目标：

- 能否按上述规则经若干次移动将黑白相间的棋列变成黑白分别的棋列，且空格仍留在棋列的某一端。



组合游戏—约瑟夫问题

- 将k个子排成一圈，在这个圈中已某子为起点，m个m个数子，将每次数到的第m个子去掉，直到去掉k-n个子为止，问：保留下来的n个子在圈中应该排在哪些位置上？
- 西方：１５个基督教徒和１５个异教徒同乘一船航行。途中风浪大作，危险万状，领航人告诉大家，只有将全船３０人的一半投入海中，其余人始能幸免。大家赞成这个办法，并议定３０人围成一圈，由一人数起，挨次向前，每至第九人，便把他投入海中，循环进行，直到仅剩１５个乘客为止。问如何排法，方可使每次投海者都是异教徒？
- Form numbers’ aid and art, Never Will fame depart.

  元音字母依次为 ｏｕｅａＩａａｅｅＩａｅｅａ

  用 １，２， ３，４，５代替ａ，ｅ，o，ｕ

  得一排数 ④５②１③１①２②３①２②1

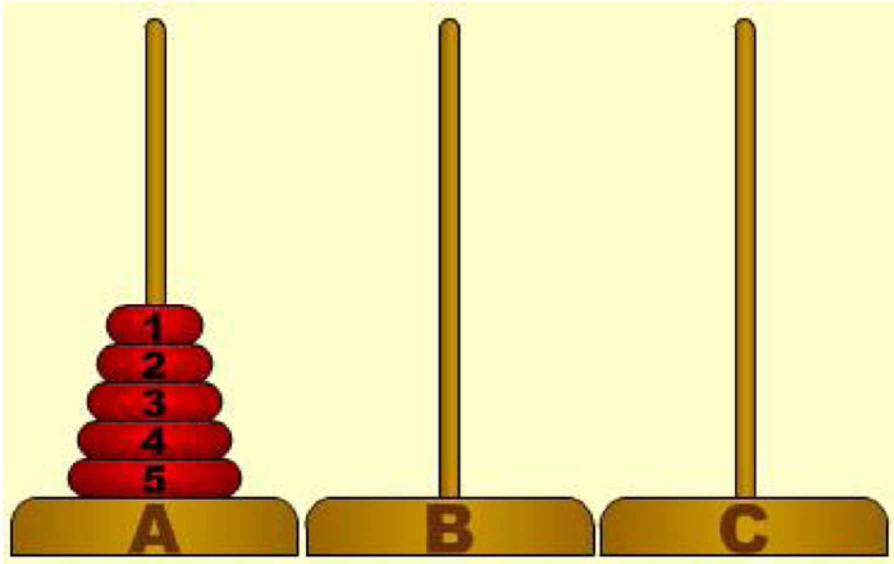
  故所求排法是④个基督教徒，５个异教徒，再２个基督教徒，１个异教徒，③个基督教徒，…，

组合游戏—约瑟夫问题

- 中国：八仙同赴王母宴。宴会主持官员为不使吕洞宾坐首席，出主意让八仙排成圆圈，并暗示小吏，从吕洞宾前一人起，按此前后次序点数。数多少？以随机掷两颗色子为准。数到谁，谁就退出圈外。继续点数，直至最后一人，他坐首席。这种方法表面上看不出主持官员做的手脚。其实，不论色子掷出多少点，吕洞宾总是做不上首席。

- 日本：（继子立问题）某贵族家有30个孩子，其中15人是前妻所生，15人为后妻所生．要从这30个孩子中选出一个来继承家业，就让这30个孩子排成一圈，从某一个小孩开始往下数，让第10个孩子从圈中退出，再从下一个继续数，数到20时就让对应20的那个孩子从圈中出去．照此数下去，数到整十的数时就把对应该数的孩子从圈中拉出，直到最后剩下一个孩子，就由这个孩子来继承家业．如果现在只剩下一个前妻之子和14个后妻之子了，那么只要从这个前妻之子开始数，就可以使这个孩子成为“继子”．

组合游戏—**Tower of Hanoi**（河内塔）



- 河内塔游戏
- 其他游戏：七巧板、华容道、九连环等等。

近代阶段（**17**世纪**60**年代—**20**世纪**60**年代）

- 迅速发展的阶段，形成了一般的存在性定理和计算原理。但是内容和方法上，基本以初等方法为主。

- 主要著作

1901 德国 E. Netto 《组合学教程》

1916 英国 P. A. MacMahon《组合分析》

1973 P. Erdos 《计数的艺术》

《组合学》
- 排列组合的基本原则；
- 二项和多项式定理和组合恒等式；
- 限位排列；
- 级数反演；
- 整数分拆（图表法）；
- 生成函数；
- 组合算法；
- 区组设计—三元系；
- 组合应用

- 主要应用

1936 英国统计学家R. A. Fisher等成功地将正交拉丁方应用到麦田统计实验中。

现代阶段（**20**世纪**60**年代以后）

- 组合数学逐步发展成为一个独立的数学分支；
- 组合学的专门期刊《组合论杂志》（Journal of combinatorial theory）、The Electronic Journal of Combinatorics、以及组合学的专门会议。
- 某些内容成为一个独立的数学分支。

例如：图论

- 与其他学科结合形成一些新的数学分支：组合几何，组合矩阵、组合拓扑、组合代数等等

现代阶段

- 计算机学科与组合数学的关系
  - 计算机是处理离散信息的科学；
    组合数学 VS 离散数学
  - 计算机的快速处理能力使得很多组合问题变得可解；
    例如，河内塔问题
  - 组合数学理论是计算机学科的重要组成部分；
    图论，计算复杂性，编码理论
  - 组合数学理论在计算机学科中具有广泛的应用；
    人工智能，密码学，数据库理论等等。

国内外现状

- 美国的离散数学及理论计算机科学中心DIMACS（与Princeton大学，Rutgers大学，AT&T 联合创办的，设在Rutgers大学），该中心已是组合数学理论计算机科学的重要研究阵地。 Los Alamos国家实验室 ， Sandia国家实验室；
- 欧洲、南美、亚洲等目前都在积极发展组合数学。

陆家羲(1935—1983)

- 陆家羲早年家贫，初中毕业后辍学，到一家汽车五金材料行当学徒。1957年考入长春市东北师范大学物理系。
- 1961年，陆家羲解决了世界著名的“柯克曼女生”数学难题，1963年、1965年两度改写、扩充，但未能得到应有的评价，均未能发表。
- 此后，陆家羲在十分困难的环境中，独立攻关，终于在1979年至1981年证明了 “斯坦纳大集定理”这一世界数学难题。这是60年代以来区组设计理论中最重要的成就之一。

附录 1：古今组合学著名问题简表（其中包括一些图论中的问题）

问题所属领域	问　题
存在问题 （Existence Problems ）	The 36 Officers Problem The Schoolgirls Problem The Seven Bridges of Konigsberg The Icosian Puzzle The 31 Dominoes Problem Squaring the Square The Marriage Problem The Stable Marriage Problem The Three Utilities Problem The 13 Spheres Problem
计数问题 （Enumeration Problems ）	The Hatcheck Problem Fibonacci's Problem The Dimer Problem The Ballot Problem Counting Hydrocarbons MacMahon's Master Theorem Triangulating Polygons Pentagonal Number Partition Problem Pizza Problem

构造和分类问题 （Structure & Classification ）	Counting Hydrocarbons Squaring the Square n Queens
算法问题（Algorithms）	The Josephus Problem The Stable Marriage Problem The Traveling Salesman Problem Ulam's Problem
优化问题（Optimization ）	The Traveling Salesman Problem The Transportation Problem The Steiner Problem The Brick-Factory Problem

课程内容

- 第1讲：引言
- 第2讲：排列与组合
- 第3讲：母函数
- 第4讲：递推关系
- 第5讲：容斥原理
- 第6讲．鸽巢原理
- 第7讲：波利亚定理
- 第8讲：组合设计

课程成绩

- 20% 作业，下次上课前交
- 20% 课程论文，自选主题，注意文献引用
- 60% 考试

教材

- 卢开澄，卢华明．组合数学（第3版）．清华大学出版社，2002.
- 卢开澄，卢华明．图论及其应用（第2版）．清华大学出版社，1996.

参考资料

- Fred Roberts, Barry Tesman. Applied Combinatorics, 2nd Edition. Prentice Hall, 2003. (机械工业出版社有影印本)
- J. H. van Lint, R. M. Wilson. A Course in Combinatorics, 2nd Edition. Cambridge University Press, 2001. (机械工业出版社有影印本)
- 柯召，魏万迪．组合论(上册，下册)．科学出版社，1981，1987．
- Douglas B. West. Introduction to Graph Theory, 2nd Edition. Prentice Hall, 2000. (机械工业出版社有影印本)
- Reinhard Diestel. Graph Theory, 2nd Edition. Springer-Verlag, 2000